3連モーメント定理によるSnap-BackおよびLoopingを含むElastica解析

岐阜大学　学生員 ○今井 康幸
岐阜大学　正会員　藤井 文夫

1．はじめに

Snap-Throughを含む荷重－変位曲線（Fig.1.a）を追跡する場合、荷重増分を自動制御するよりは、最も簡単にある特定の節点変位を強制変位として制御する手段がとられることがある。しかしこの手段は、系や荷重条件が複雑になると制御すべき変位としてどの変位を採用するかが不明であり一般性に乏しい。仮に変位制御できたとしても、Snap-Back（Fig.1.b）やLooping（Fig.1.c）のように複雑な解曲線を示す問題には、応用不可能となる。これに対処するためには、Riksらによって提唱された弧長法などのいわゆるPath-Followingタイプの追跡法を用いなければならない。

本研究ではこれらの複雑な後座屈挙動を示すElastica問題の支配方程式を３連モーメント定理によって導き［1］、弧長法とほぼ同時に発表された篠原法［3］（これもPath-Followingタイプの１つ）によって、Snap-BackやLoopingの解曲線を追跡するものである。

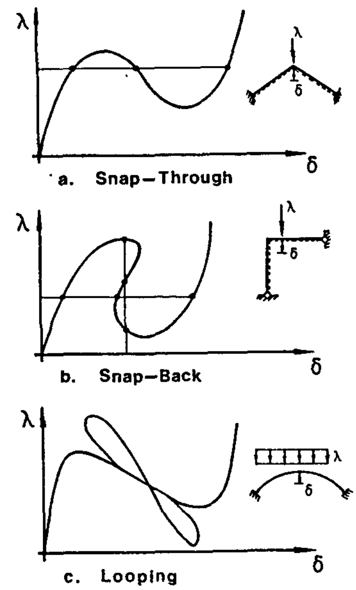

Fig. 1

2．理論

系の節点にピン結合を仮定したリンク構造に、まず部材回転角θを用いて表せる剛体変位が発生する（C_1）。つづいてC_1の状態に材端モーメントmを作用させると、C_1からC_2の曲げ変形による微小弾性変形が生じ最終的なElasticaの変形を求めることができる。このElasticaの有限変位に対して、通常の３連モーメント定理を適用することによって、次のようなElastica問題に対する離散化方程式を得ることができる。

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{m} & \boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{\mu} & \lambda \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{M} & \mathbf{N} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \hdashline \mathbf{N}^T & \mathbf{O} & \mathbf{L} & \mathbf{K} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

$$\mathrm{U}\ \langle \boldsymbol{\theta} \rangle = 0$$
$$\mathrm{V}\ \langle \boldsymbol{\theta} \rangle = 0$$

ここに、$\mathbf{m}$：材端モーメント，$\boldsymbol{\theta}$：部材回転角，$\boldsymbol{\mu}$：端の水平・鉛直変位を拘束するための未知支点反力（Lagrangeの未定乗数），λ：荷重パラメータである。

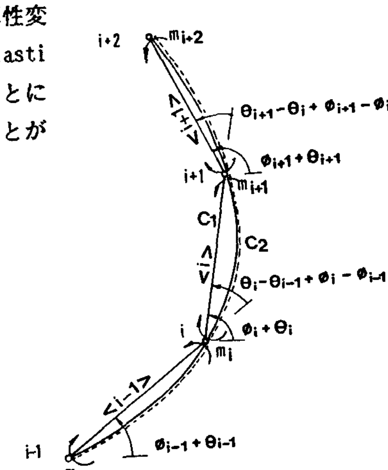

Fig. 2

このElasticaの支配方程式は、節点回転角に対する適合条件・つり合い条件、及び系の端における変位の拘束条件からなり、これらの式から材端モーメントを消去するができる。この結果得られる支配方程式は、部材回転角と端の２つ支点反力を未知量とする方程式であり、従ってこれらの未知数の数を部材の本数とほぼ等しい小さな数に抑えることができる。そしてこの支配方程式の解曲線を、篠原法で求める。

３．例題

平面骨組のSnap-Backの問題として有名なLee Frame［2］を解析した例を、Fig. 3～Fig. 5に示す。Fig. 3の変位はリンク構造の剛体変位後の形状（Fig. 2の形状C_1）をプロットしたため、各節点で折れ角を示す折れ線となっているが、この折れ角（節点回転角の不連続量）は、材端モーメントを作用させることにより消滅し滑らかな曲線（Fig. 2の形状C_2）となる。Fig. 4では、集中荷重の作用する節点の水平・鉛直変位をプロットし、どちらも１つの節点変位の値に対して、２つの荷重パラメータを示すことがわかる。Fig. 5は、支点反力の変化を示し、特に鉛直反力は、Ⓐと⒝において急変する。Loopingの例題は講演当日発表する。

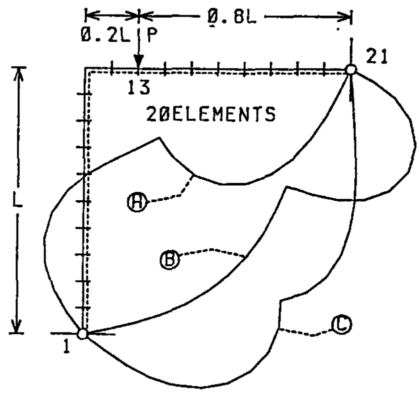

Fig. 3　Lee's Frame
（系の図＋変形図C_1）

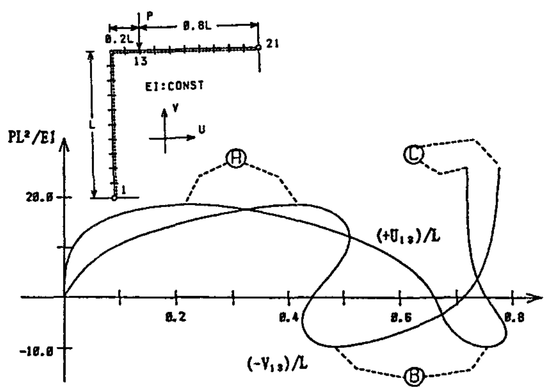

Fig. 4　Lee's Frame
（Snap-Back Behavior）

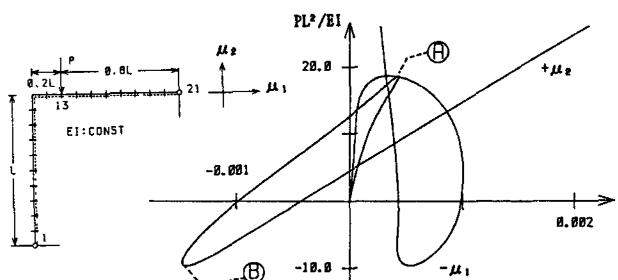

Fig. 5　Lee's Frame
（支点反力）

４．まとめ

混合法の一種である未知節点変位を含む３連モーメント定理を高次非線形のElastica問題に応用する利点は、次のようである。①回転量（曲げモーメントと部材回転角）を独立変数としているため非線形性を低く抑えることができる。②未知数の数を部材本数と同じくらいの小さな数に抑えることができる。③定式化が簡単である。④定式化が簡単な割に結果の精度が良好である。

５．参考文献

［1］Fumio Fujii:"A SIMPLE MIXED FORMULATION FOR ELASTICA PROBLEMS", Computers & Structures, Vol. 17, No. 1, pp. 79-88, 1983

［2］Lee, S. L., Manuel, F. S. and Rosow, E. D., "Large deflections and stability of elastic frames", EM 2, Proc. ASCE., pp. 521-547, 1968

［3］Shinohara, Y., "A geometric method of numerical solution of nonlinear equations and error estimation by Urabe's Proposition", Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ., Series A, Vol. 5, No. 1, 1969