V－4

パイプクーリングによる熱除去効果における数値解析の２、３の問題点

名古屋大学工学部　学生会員　○山田　徹
名古屋大学工学部　正会員　畑中重光
名古屋大学工学部　正会員　田辺忠顕

1　序

パイプクーリングを効果的に行なうためには、配管のレイアウト、管径、冷却水の流速、初期水温等を決める必要がある。そのためコンクリート中に配置された配管網から冷却水を通していかに熱が除去されるか解析を行わなければならない。

溝渕らは、クーリングパイプ内の水の支配方程式をガラーキン法により定式化し、それにWilsonとCloughによって提案された解法を用い差分解を求めた。しかし、この場合に数値解析上の収束のゆらぎなどが、指摘されており多少問題が残っていると言える。ここでは、そのためにいくつか数値実験を行うとともに、新たに解析解を求めることを試みた。即ち、マトリックスの固有値、固有ベクトルを用い冷却水における熱の交換に対するの支配方程式を解き解を求めた。

以上の解析方法によりパイプクーリングによる熱除去効果解析に残された問題点を解消することを目的とした。

2　クーリング効果の解析手法

パイプ内の水の支配方程式にガラーキン法を用いると、次式のようになる。

$$\rho_w \cdot c_w \cdot A u \int_V \delta T_w \left(u\, \partial T_w/\partial S + 1/(\rho_w c_w) \cdot 2h(T_w - T_c) + \partial T_w/\partial t \right) dv = 0 \quad \cdots (2,1)$$

ここで、ρ_w、c_w は水の密度ならびに比熱であり、A、r パイプの断面積および半径であり、u は流速である。T_w は水温を表わす。

$\delta T_w = [N_w]\ \delta\{T_w\}$、$T_w = [N_w]\ \{T_w\}$、の関係より

$$\rho_w \cdot c_w \cdot A \int_V [N_1, N_2] \begin{Bmatrix} \delta T_{w1} \\ \delta T_{w2} \end{Bmatrix} \left(u\, \partial\{T_w\}/\partial S + (\rho_w \cdot c_w)^{-1} \cdot 2h/r\, (\{T_w\} - \{T_c\}) + \partial\{T_w\}/\partial t \right) dV = 0$$

$(\delta T_{w1},\ \delta T_{w2}) \neq 0$ より

$$[K_w]\{T_w\} + [W]\partial\{T_w\}/\partial t - [K_{wc}]\{T_c\} = 0$$

$$[K_w] = \begin{bmatrix} -0.5\,\rho_w c_w A u + 2hAl/3r & 0.5\,\rho_w c_w A u + 2hAl/6r \\ -0.5\,\rho_w c_w A u + 2hAl/6r & 0.5\,\rho_w c_w A u + 2hAl/3r \end{bmatrix}$$

$$[W] = \rho_w c_w A \begin{bmatrix} l/3 & l/6 \\ l/6 & l/3 \end{bmatrix} \qquad [K_{wc}] = 2hA/r \begin{bmatrix} l/3 & l/6 \\ l/6 & l/3 \end{bmatrix}$$

ここで l は１要素の長さである。（２、３）より［Kw］は非対称となり、全体系の伝導マトリックスは非対称となることに注意する必要 がある。

さらに　Wilson　と Clough によって提案された解法を適用する。Δt の時間刻みの間に $\{\partial\theta/\partial t\}$ の値が時間と共に直線的に変化するとすると、時刻 t における θ の値 $\{\theta\}t$ は、

$$\{\theta\}_t = \{\theta\}_{t-\Delta t} + \left(\{\partial\theta/\partial t\}_{t-\Delta t} + \{\partial\theta/\partial t\}_t\right)\Delta t/2 \quad \cdots(2,4)$$

$$([K_w]+2/\Delta t[W])\{\theta\}_t+[W]\left(-2/\Delta t\{\theta\}_{t-\Delta t} - \{\partial\theta/\partial t\}_{t-\Delta t}\right)=[K_{wc}]\{T_c\} \quad \cdots(2,5)$$

（２、４）式を（２、２）式に代入すると上の式が得られる。

初期値から、初期勾配が求まり、以後繰り返し計算することによって任意の時刻の水温が得られる。　以上の式を、プログラムを作り大型計算機に入れ計算させる。Δt ステップごとの温度が得られる。その計算結果を Fig-1　に示します。

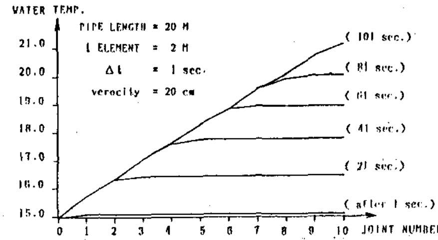

Fig-1　差分解の計算結果

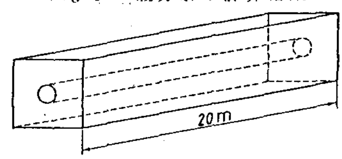

Fig-2　パイプクーリング　モデル

次に、固有値、固有ベクトルを用いて直接（２、２）式を解く。

$$\frac{d\mathbb{X}}{dt} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{C} \qquad \mathbb{A} = -[W]^{-1}[K_w]$$

$\mathbb{X} = \{T_w\}$ …WATER TEMP.

$\mathbb{C} = [W]^{-1}[K_{wc}]\{T_c\}$ …CONSTANT

ここで特解を求めるために $\mathbb{X} = \mathbb{B}$ とおく。すると

$$\mathbb{B} = -\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C} \quad \cdots(2,6)$$

より特解が得られる。

次に同次微分方程式の $\frac{d\mathbb{X}}{dt} = \mathbb{A}\mathbb{X}$ の解は一般に

$$\mathbb{X}(t) = a_1 e^{\lambda_1 t}\Lambda_1 + a_2 e^{\lambda_2 t}\Lambda_2 + \cdots + a_n e^{\lambda_n t}\Lambda_n \quad \cdots(2,7)$$

のように表される。ここで、λ_i，Λ_i はそれぞれ固有値、固有ベクトルである。

これに（２、６）で求めた特解を加え、以下のような一般解が得られる。

$$\mathbb{X}(t) = a_1 e^{\lambda_1 t}\Lambda_1 + a_2 e^{\lambda_2 t}\Lambda_2 + \cdots + a_n e^{\lambda_n t}\Lambda_n + \mathbb{B} \quad \cdots(2,8)$$

次に初期条件より係数 a_1，a_2，，，a_n を決定する。

$$a_1\Lambda_1 + a_2\Lambda_2 + \cdots + a_n\Lambda_n + \mathbb{B} = \mathbb{X}(0)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots \Lambda_n]^{-1}(\mathbb{X}(0) - \mathbb{B}) \quad \cdots(2,9)$$

従って数値係数 $\{a_1, a_2, , , a_n\}$ が決定された。

ここで、（２、８）式に任意の時刻 t を代入することにより、任意の時刻のパイプ内の水温を知ることができる。

上記の２つの手法により Fig-2のようなパイプを流れる水の温度解析をおこなった。

それらの結果の比較については、当日発表したいと思います。