不確定条件下における最適公共投資システムの解法について

信州大学工学部　正　員　奥谷　巌
長野工業高等専門学校　正　員　○柳沢吉保

1．まえがき

限られた公共資金を効率よく配分するための不確定条件下での最適公共投資問題の定式化については既に試みた。しかしそこでは目的関数に期待値をとっているため，実際に攪乱項が入ってきた場合の社会経済システムの変動については考慮されていなかった。そこで本稿では，既存の最適方策が攪乱項によりどのような影響を受けるか検討を行なうとともに，既存の最適方策を，経済システムの変動により新たに得られた情報をもとに修正し，最適化をはかる適合計画も取り入れ，検討を行なう。

2．計量経済モデルを導入した動的な確率システム

i)　システム方程式

本研究では経済分析に有効な計量経済モデルを導入している．ある線形計量経済モデルを以下のような線形のシステム方程式に変換する．

$$x_t = \Psi x_{t-1} + \Gamma u_{t-1} + b + \xi_{t-1} \tag{1}$$

ここで x_t は内生変数を含む状態量，u_t は公共投資を示す政策変数，b は定数項，ξ_t は攪乱項である。

ii)　目的関数，制約条件

目的関数については状態量の線形式で表わし，

$$E(J) = \sum_{t=1}^{N} E(a_t x_t) \tag{2}$$

のように期待値をとったものを評価基準とし，

$$H_t(x_t, u_t) \leqq 0 \quad (t = 0, 1, \cdots, N-1) \tag{3}$$

のような線形制約条件の下で(2)式を最大にする，$u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}$ を求める。

iii)　攪乱項の性質

攪乱項の性質としては

$$E(\xi_t)=0,\ E(\xi_t\xi_t^T)=\Sigma_t\ (\text{既知}),\ E(\xi_t\xi_{t'}^T)=0 \tag{4}$$

（Eは期待値，Tは転置，$t \neq t'$）と仮定する．

3．最適制御政策

最適制御政策については既に試みているので，ここでは一般的な第k期についての記述を行なう。

目的関数

$$\widehat{a}_k \Gamma \zeta_{k-1} \longrightarrow max \tag{5}$$

制約条件

$$0 \leqq \sum_i \sum_j \zeta_j^i(k-1) \leqq 1 \quad (i:\text{公共投資},\ j:\text{ゾーン}) \tag{6}$$

(6)式の下で(5)式を最大化することによって得られる最適な ζ_{k-1} を ζ_{k-1}^* とすると，最適な u_{k-1}^* は

$$u_{k-1}^* = \alpha(k-1)\chi^I(k-1)\zeta_{k-1}^* = F_{k-1} x_{k-1} \zeta_{k-1}^* \tag{7}$$

ここで　$\widehat{a}_k = a_k + \widehat{a}_{k+1}(\Psi + \Gamma\zeta_{k-1}^* F_{k-1})$　(8)

$\widehat{a}_N = a_N$　　　$(k=1, 2, \cdots, N)$

である。$\alpha(k-1)$はある変量 $\chi^I(k-1)$ に対する $(k-1)$ 時点における全公共投資量に対する割合である．ζ_{k-1}は全公共投資量に対するある公共投資量の割合，すなわち投資割合である．以上により，初期値が与えられると各期の最適投資割合が決定される。

4．適合的最適制御政策

前章においては，目的関数の期待値を最大にするような公共投資 $\zeta_0^*, \zeta_1^*, \cdots \zeta_{N-1}^*$ を決定した．すなわち状態量 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の条件付期待値 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_N$ を用いて制御を行なったわけであるが，実際の状態量が，$\bar{x}_1+\Delta x_1, \bar{x}_2+\Delta x_2, \cdots, \bar{x}_N+\Delta x_N$ である場合，初期時点において決定された政策をそのまま実行するよりも，実際にわかった状態量をもとに改めて最適政策を決定した方がより実際的であろう．以下，攪乱項を考慮に入れた場合とパラメータが変動する場合について考察を行なう。

i) 攪乱項を考慮に入れた場合の適合的最適制御政策

システム方程式に攪乱項が入ってくる場合の適合計画については，(5), (6), (8)式からわかるように最適投資政策を決定するための最適化問題の中に攪乱項が存在していない。そしてパラメータについては常に一定であるため，適合計画を適用しても，決定される投資割合については，従来の確率的制御政策により決定される $\xi_0^*, \xi_1^*, \cdots, \xi_{N-1}^*$ と同じ結果になる。

ii) パラメータの変動も考慮に入れた場合の適合的最適制御政策

従来からの確率的制御によりパラメータの毎期の変動を期待値的に決定すると，一般的な第 k 期については

目的関数

$$\hat{a}_k \bar{\Gamma}_{k-1} \xi_{k-1} \rightarrow max \qquad (9)$$

制約条件

$$0 \leqq \sum_i \sum_j \xi_j^i (k-1) \leqq 1 \qquad (10)$$

ここで　$\hat{a}_k = a_k + \hat{a}_{k+1} (\bar{\Psi}_k + \bar{\Gamma}_k \xi_{k-1}^* F_{k-1})$

従来ではパラメータの変動については，パラメータの初期の時点の期待値と分散・共分散が与えられ，ベイズの定理を用いることによって毎期のパラメータを求めていた。

そこで適合的な考えに立ち N 期の政策を決定するものとすると，まず初期時点においては，与えられたパラメータと投資割合を用いる。そして第1期になるとまた新たなパラメータが実現するため，そのパラメータを用いて新たに1期減した($N-1$)期の最適制御を行なう。すると新たに求まった最適政策のほうが，従来の確率制御により初期時点において求まっている第1期の最適政策よりも，現実に即しているため，より望ましい政策である可能性がある。従って，第1期について適合的な考えにより新たに求まった最適政策を適用する方がより実際的である。残っている後の各期についても，新たに実現するパラメータによる適合的政策を採用し，時々刻々と変化する情勢に応じた政策変更を行なう。

5. シミュレーション

実際に最適政策を行なう場合，すべての経済要因が確率的に変動している中で，偶発的変動に左右されることが多いので，最適な政策を見いだすことは一回の試行では非常に困難である。そのため多数のシミュレーションを行ない，その中からいずれの政策がよりよい政策であるかについて検討を行なわなければならない。以下，適合的な場合における計算アルゴリズムを示す。

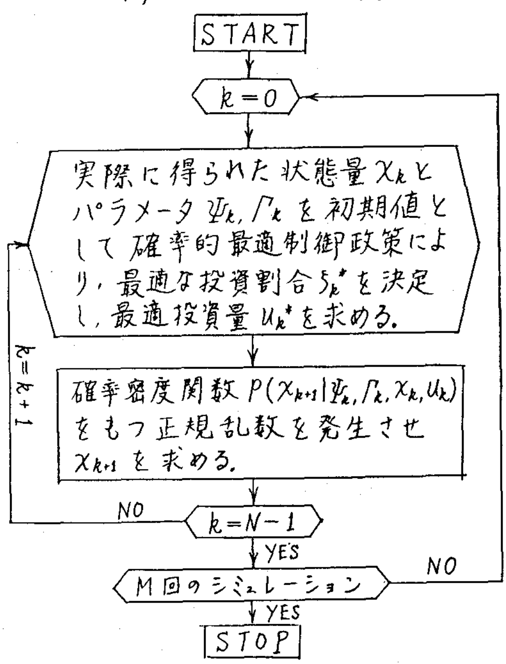

図-1 適合制御による計算アルゴリズム

図-1において，$P(x_{k+1}|\Psi_k, \Gamma_k, x_k, u_k)$ は

$$P(x_{k+1}|\Psi_k, \Gamma_k, x_k, u_k) = const\{-1/2(x_{k+1} - \Psi_k x_k - \Gamma_k u_k - b)^T \Sigma_j^{-1} (x_{k+1} - \Psi_k x_k - \Gamma_k u_k - b)\} \qquad (11)$$

である。図-1における適合的な考え方に立った最適政策と，従来行なっていた最適政策とを比較し，検討を加える。尚，計算結果は当日発表する。

〈参考文献〉「不確定条件下における公共投資に関する基礎的研究」奥谷巌，柳沢吉保，昭和60年度中部支部概要集