需要の弾力性を考慮した土地利用均衡モデルの拡張について

信州大学工学部　正員　奥谷 巖
信州大学工学部　○学生員　宇山 俊彦

1．まえがき

本研究では，複数の都市（地域）を対象とし，それらすべての都市に対する総立地量を既成的に予測して与える場合と，それが，地価と効用の相互関係から決定される，いわば立地需要関数が，陰な形で与えられている場合とにおける均衡問題を定式化し，計算アルゴリズムを構築することを試みた。

2．土地利用均衡問題の定式化

まず記号を定義する。

i：都市内のアクティビティーを示す添字（$i=1\cdots n$）

c：都市を示す添字（$c=1\cdots m$）

p：ゾーンを示す添字（$p=1\cdots M_c$）

x^i_{cp}：i アクティビティーで都市 c のあるゾーン p における立地量

V^i_{cp}：i アクティビティーで都市 c のあるゾーン p における効用

G_{cp}：都市 c の中のゾーン p における地価

A_c：都市 c における魅力度

以上のような定義のもとで，われわれは，次のような最適化問題を考える。

すなわち目的関数は

$$Z(x,d)=\sum_{c=1}^{m}\sum_{p=1}^{M_c}\int_0^{x_{cp}}G_{cp}(X)\,dX-\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{m}A_c\cdot d^i_c+\sum_{c=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{M_c}\int_0^{x^i_{cp}}\tilde{V}^i_{cp}(w)\,dw\right)$$

$$\rightarrow \min \qquad —(1)$$

ここで $\tilde{V}^i_{cp}(w)$ とは，$\tilde{V}^i_{cp}({}^{k}x^1_{11},{}^{k}x^1_{12}\cdots{}^{k}x^i_{cp}\cdots{}^{k}x^n_{mM_m})$ で ${}^{k}x^i_{cp}$ となるところを w におきかえ，残りを k ステップ目の均衡解とし，（$k+1$）ステップ目の最適化問題を吟味する関数であるとする。

2・1　すべての都市に対する総立地量を既成的に予測して与える場合

制約条件

$$X_{cp}=\sum_{i=1}^{n}x^i_{cp} \qquad —(2)$$

$$d^i_c=\sum_{p=1}^{M_c}x^i_{cp} \qquad —(3)$$

$$D^i=\sum_{c=1}^{m}d^i_c \qquad —(4)$$

$$x^i_{cp}\geqq 0 \qquad —(5)$$

$$X_{cp}\geqq 0 \qquad —(6)$$

$$d^i_c\geqq 0 \qquad —(7)$$

上の目的関数 $Z(x,d)$ は凸関数ではないので，均衡解の唯一性は言えないが，k ステップ目の解と（$k+1$）ステップ目の解が一致するものとすると，$Z(x,d)$ の最適性の必要条件である，Kuhn-Tucker の条件は (8)〜(11) に示すような均衡条件を与える。

$x^i_{cp}>0$ のとき　$u^i_c=V^i_{cp}-G_{cp}$ —(8)

$x^i_{cp}=0$ のとき　$u^i_c\geqq V^i_{cp}-G_{cp}$ —(9)

$d^i_c>0$ のとき　$\mu^i=A_c+u^i_c$ —(10)

$d^i_c=0$ のとき　$\mu^i\geqq A_c+u^i_c$ —(11)

u^i_c，μ^i はラグランジェ乗数

(8)，(10) より

$x^i_{cp}>0$ のとき　$\mu^i=A_c+V^i_{cp}-G_{cp}$ —(12)

(9)，(10)，(11) より，

$x^i_{cp}=0$ のとき　$\mu^i\geqq A_c+V^i_{cp}-G_{cp}$ —(13)

(12)，(13) より，立地しているゾーンの純効用は，立地している都市ならびにゾーンによらず，一定であり，立地していないいかなるゾーンの純効用よりも大きくなることを意味している。

2・2　すべての都市に対する総立地量が地価と効用の相互関係から決定される場合

この場合は，2・1 の問題について，D^i が変数として与えられる場合に相当する。(1) 式で与られる目的関数を制約条件 (2)〜(7) 式ならびに $D^i\geqq 0$ のもとで最小化する。

2・1 と同様にして，k ステップ目と（$k+1$）ステッ

プ目の均衡解が一致するものとすると，Kuhn-Tuckerの条件より 次のような均衡条件が導かれる。

$x^i_{cp}>0$ のとき $U^i_c = U^i_{cp} - G_{cp}$ (14)

$x^i_{cp}=0$ のとき $U^i_c \ge U^i_{cp} - G_{cp}$ (15)

$d^i_c>0$ のとき $U^i_c + A_c = 0$ (16)

$d^i_c=0$ のとき $U^i_c + A_c \le 0$ (17)

$D^i>0$ のとき $\exists c$ $d^i_c>0$

$U^i_c + A_c = 0$ (18)

$D^i=0$ のとき $U^i_c + A_c \le 0$ (19)

(14)、(16)より

$x^i_{cp}>0$ のとき $G_{cp} = A_c + U^i_{cp}$ (20)

(15)、(16)、(17)より

$x^i_{cp}=0$ のとき $G_{cp} \ge A_c + U^i_{cp}$ (21)

(20)、(21)より、ある都市のあるゾーンにおいて立地するアクティビティーの総効用は、アクティビティーによらず等しく、立地しないアクティビティーのその都市のそのゾーンに対して認める総効用より大きくなるということである。

3. 計算アルゴリズム

最適化問題に、Frank-wolfeの分解原理を用いるが、くり返し計算における均衡解を求める場合制約条件は、立地量の単なるsummationに対する制約であるから、all or nothing法で簡単に線形近似解を求めることができる。

3・1 すべての都市に対する総立地量を既成的に予測して与える場合

step 1 目的関数(1)の変数を x^i_{cp} だけになるよう書きかえ、制約条件を $\sum_{c=1}^{m}\left(\sum_{p=1}^{M_c} x^i_{cp}\right) = D^i$

$x^i_{cp} \ge 0$ として

線形近似する。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{m}\sum_{p=1}^{M_c}\left[G_{cp}({}^k X_{cp}) - \tilde{U}^i_{cp}({}^k x^i_{cp}) - A_c\right] f^i_{cp} \to \min \quad (22)$$

制約条件 $\sum_{c=1}^{m}\sum_{p=1}^{M_c} f^i_{cp} = D^i$ $f^i_{cp} \ge 0$

step 2 i について (22)式が分解できるので

$$\sum_{c=1}^{m}\sum_{p=1}^{M_c}\left[G_{cp}\left(\sum_{i=1}^{n}{}^k x^i_{cp}\right) - \tilde{U}^i_{cp}({}^k x^i_{cp}) - A_c\right] f^i_{cp} \to \min$$

制約条件 $\sum_{c=1}^{m}\sum_{p=1}^{M_c} f^i_{cp} = D^i$ $f^i_{cp} \ge 0$

したがって if $G_{cp}\left(\sum_{i=1}^{n}{}^k x^i_{cp}\right) < \tilde{U}^i_{cp}({}^k x^i_{cp}) + A_c$, ${}^k g^i_{cp} = D^i$

if $G_{cp}\left(\sum_{i=1}^{n}{}^k x^i_{cp}\right) \ge \tilde{U}^i_{cp}({}^k x^i_{cp}) + A_c$, ${}^k g^i_{cp} = 0$

$i \ne l$ において ${}^k g^l_{cp} = 0$

step 3 $\left|{}^k g^i_{cp} - {}^{k+1} g^i_{cp}\right| \le \varepsilon$ なら停止

step 4 $\sum_{i=1}^{n}{}^k g^i_{cp} = {}^k Y_{cp}$, $\sum_{p=1}^{M_c}{}^k g^i_{cp} = {}^k v^i_c$ とおく

$$\min_{0\le\alpha\le1} Z(\alpha) = \sum_{c=1}^{m}\sum_{p=1}^{M_c}\int_0^{{}^k X_{cp} + \alpha({}^k Y_{cp} - {}^k X_{cp})} G_{cp}(X)\, dX - \sum_{c=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} A_c\left[{}^k g^i_c + \alpha({}^k v^i_c - {}^k g^i_c)\right] - \sum_{c=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{M_c}\int_0^{{}^k x^i_{cp} + \alpha({}^k g^i_{cp} - {}^k x^i_{cp})} \tilde{U}^i_{cp}(w)\, dw$$

これを最小とする α を ${}^k\alpha$ とする。

${}^{k+1}x^i_{cp} = {}^k x^i_{cp} + {}^k\alpha({}^k g^i_{cp} - {}^k x^i_{cp})$

${}^{k+1}X_{cp} = {}^k g^i_c + {}^k\alpha({}^k v^i_c - {}^k g^i_c)$ とおき step 2 にもどる。

3・2 すべての都市に対する総立地量が地価と効用の相互関係から決定される場合。

step 1 D^i に上限値 $\bar{D}^i$ を設ける。そして、目的関数(1)の変数を x^i_{cp} だけになるよう書きかえ、

制約条件 $\sum_{c=1}^{m}\left(\sum_{p=1}^{M_c} x^i_{cp}\right) \le \bar{D}^i$, $x^i_{cp} \ge 0$

として線形近似する。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{m}\sum_{p=1}^{M_c}\left[G_{cp}({}^k X_{cp}) - \tilde{U}^i_{cp}({}^k x^i_{cp}) - A_c\right] f^i_{cp} \to \min$$

制約条件 $\sum_{c=1}^{m}\sum_{p=1}^{M_c} f^i_{cp} \le \bar{D}^i$ $f^i_{cp} \ge 0$

step 2 i について分解できるので

if $G_{cp}\left(\sum_{i=1}^{n}{}^k x^i_{cp}\right) < \tilde{U}^i_{cp}({}^k x^i_{cp}) + A_c$ ${}^k g^i_{cp} = \bar{D}^i$

if $G_{cp}\left(\sum_{i=1}^{n}{}^k x^i_{cp}\right) \ge \tilde{U}^i_{cp}({}^k x^i_{cp}) + A_c$ ${}^k g^i_{cp} = 0$

$i \ne l$ において ${}^k g^l_{cp} = 0$

step 3〜step 4については 3・1とまったく同じである。

4. むすび

本研究で用いた最適化問題によっても、すべてを必ずしも満足させておらず、完璧に合理的な均衡解は得られていない。今後、さらに検討を進めてゆく必要がある。

《参考文献》

・奥谷、若林；土木学会中部支部研究発表会講演概要集(S.61) P302〜P303
・Yosef Sheffi; stochastic User Equilibrium P135〜P139 P214〜P220
・N.H.GARTNER; Analysis and control of Transportation network by Frank-Wolfe decomposition