

修正流れ関数法による波の Shoaling 計算

名古屋工業大学 正員 喜岡 渉 学生員 O 佐藤 宏志 菊地 直智

1. はじめに

最近になって、定形進行波の厳密解とみなすことのできる有限振幅波理論に基づく波の Shoaling 計算が試みられており、酒井・Battjes¹⁾ は Cokelet の理論を用いた計算結果を、Stiassnie・Peregrine²⁾ は Cokelet の理論および長波に対しては孤立波理論 (Trains of Solitary Waves) を用いた計算結果を示している。長波領域における計算精度が高いと考えられる後者の結果は定形波理論による Shoaling の厳密解を与えたものといえようが、これら厳密解に基づく計算は実用上煩雑であり、また砕波点付近の波の測定値との対応も他の低次近似解と比べて必ずしも改善されているとはいえない。一方、Rienecker・Fenton³⁾ は波速や流量フラックスなどの取り扱い方が従来の理論に比べて厳密である流れ関数法を提案するとともに、二、三のケースについてはエネルギー・フラックス法による波の Shoaling 計算も試みている。本研究では、彼らによる修正流れ関数法に基づく波の Shoaling 計算についてその詳細を検討するとともに、実験値と比較することによってその適用性を考察することとする。

2. 修正流れ関数法

波とともに移動する移動座標系を用いて運動を定常化する。ただし、 z 軸を水底面から鉛直上向きにとり、 x 軸は波の進行方向を正とする。流れ関数を式 (1) のように定義すると、ラプラスの方程式および水底条件を満足する ψ は式 (2) で与えることができる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{----- (1)}$$

$$\psi(x, z) = B_0 z + \sum_{j=1}^N \frac{\sinh j k z}{\cosh j k D} (B_{2j-1} \cos j k x + B_{2j} \sin j k x) \quad \text{----- (2)}$$

ここで、 D は深海での計算も可能にするために導入した任意の水深 (通常、平均水深 $\bar{h}$ と等しくとる) を示し、Rienecker・Fenton と同様に平均水深 $\bar{h}$ を用いて諸量を無次元化する。また、前後非対称の波も取り扱えるように $\sin$ 項を加え、定数 B_j ($j=0 \sim N$) は自由表面の境界条件を満足ならしめるように決定する。すなわち、波長 L の波を M 個に分割し、 $x_m = m L / M$, $\eta_m = \eta(x_m)$ とすると運動学的境界条件および力学的境界条件より $m=0 \sim N$ に対して、それぞれ式 (3), (4) を得る。

$$B_0 \eta_m + \sum_{j=1}^N \frac{\sinh j k \eta_m}{\cosh j k D} \{ B_{2j-1} \cos(2j m \pi / M) + B_{2j} \sin(2j m \pi / M) \} + Q = 0 \quad \text{----- (3)}$$

$$\frac{1}{2} (u_m^2 + w_m^2) + \eta_m - R = 0 \quad \text{----- (4)}$$

ここに、

$$u_m = B_0 + k \sum_{j=1}^N j \frac{\cosh j k \eta_m}{\cosh j k D} \{ B_{2j-1} \cos(2j m \pi / M) + B_{2j} \sin(2j m \pi / M) \}$$

$$w_m = k \sum_{j=1}^N j \frac{\sinh j k \eta_m}{\cosh j k D} \{ B_{2j-1} \sin(2j m \pi / M) - B_{2j} \cos(2j m \pi / M) \}$$

さらに、拘束条件として以下の式を加えることとする。

$$\frac{1}{2M} (\eta_0 + \eta_M + 2 \sum_{j=1}^{M-1} \eta_j) - 1 = 0 \quad \text{----- (5)}$$

$$\eta_{\max} - \eta_{\min} - H = 0 \quad \text{----- (6)}$$

$$\frac{MA}{4\pi} (\eta_{M0+1} - \eta_{M0-1}) = 0, \quad j = M0 \text{ for } \eta_{\max} \quad \text{----- (7)}$$

$$kCT - 2\pi = 0 \quad \text{----- (8)}$$

$$C - Q = 0 \quad \text{----- (9)}$$

$$\frac{1}{2}C^3 - \frac{3}{2}C^2Q + C(2R-1) - \frac{1}{2}QB_0 - \bar{\eta}^2 - Q(R-1) - F_0 = 0, \quad \text{----- (10)}$$

$$\bar{\eta}^2 = \frac{1}{2M} (\eta_0^2 + \eta_M^2 + 2 \sum_{j=1}^{M-1} \eta_j^2)$$

上式はそれぞれ、平均水深、波高 H , crest の位置 ($\partial\eta / \partial x = 0$), 波数 k , 波速 c およびエネルギーフラックスに対する条件式を示している。式(9)は断面平均の質量輸送が0となる条件を与えており、従って平均オイラー流速 U は次式から求めることができる。

$$U = C + B_0. \quad \text{----- (11)}$$

また、radiation stress S_{xx} は次式により与えられる。

$$S_{xx} = 2(R-1) - C^2 - \frac{3}{2}(\bar{\eta}^2 - 1) \quad \text{----- (12)}$$

3. 計算方法と計算結果

以上より、波のShoaling計算は式(3)～(10)の非線形連立方程式を解くことに帰着する。すなわち、未知量 η_m ($m = 0 \sim M$), B_j ($j = 0 \sim 2N$), c , k , Q , R , H に対して、 $2M + 8$ の方程式を得る。

未知量の数と方程式の数を同じにとれば(すなわち $M = 2N - 1$), 通常のNewton法により解くことができるが、ここでは $M > 2N - 1$ に対して適用できる準Newton法による最小二乗解を求めることとした。図-1は計算結果を1/35勾配斜面での実験結果¹⁾と比較したもので、 h_0 は斜面前面での一様水深を示す。計算には、グラフの右端の $T(g/h_0)^{1/2} = 9.545$, $H/h_0 = 0.130$ を初期条件として与え、 $N = 10$, 18の前後対称波と $N = 10$ の非対称波(前傾度は実験結果から与えた)について波高変化を求めた。繰り返し計算は各未知量の増分が、 1×10^{-3} 以下になるまで行った。残差誤差を図中に示す。砕波点付近を除き、全てのケースの波高変化はほぼ同一の値を示している。

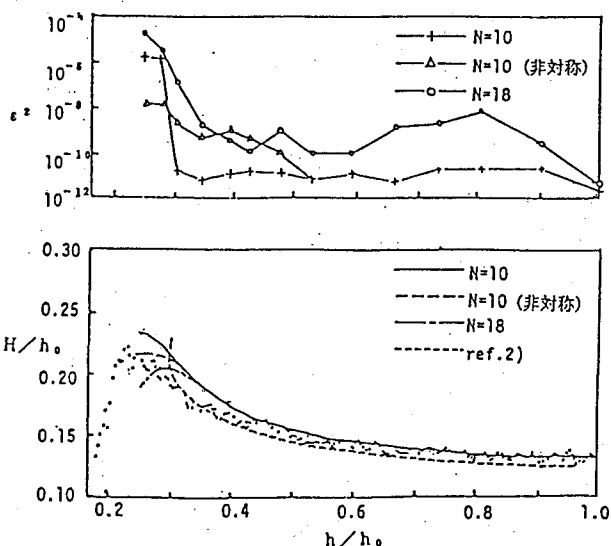


図-1 波高変化と計算誤差

参考文献 1) 酒井・Battjes, 第27回海講, PP25-29, 1980.

2) Stiassnie・Peregrine, J.F.M., Vol.97, PP783-805, 1980.

3) Rienecker・Fenton, J.E.M., Vol.10, PP119-137, 1981.