II－2

非正規母集団の推定母数の信頼性（その3）

信州大学工学部　正会員　荒木正夫　信州大学工学部　正会員　寒川典昭

信州大学大学院　学生員○上原　剛　信州大学工学部　　　草刈智一

１．はじめに

水工計画の精度に大きな影響を与える確率水文量の不確定さは，水文頻度解析に適用した確率分布が母集団の分布形状と異なっているために生じる不確定さと，観測資料が十分でないために生じる推定母数のもつ不確定さの２つに大きく分けることができる。我々は，従来理論的な検討がほとんどなされていなかった推定母数のもつ不確定さに着目し，確率変数とみなした母数の確率分布のエントロピーを測ることにより推定母数の信頼性を評価してきた。[1),2),3)]　本稿では，これらの研究の継続として２母数を共に未知とした対数正規分布の場合について検討する。

２、確率水文量の不確定さ

Fig.1 は，月降水量に対数正規分布を適用して，超過100 年確率水文量と資料数との関係を図にしたものである。これより，資料数が少ない時には，変動が大きいことがわかる。

３．事後確率分布のエントロピー

n 個の確率変数 $\tilde{x}(n)=(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_n)$ が，互いに独立に，次式の対数正規分布に従うものとする。

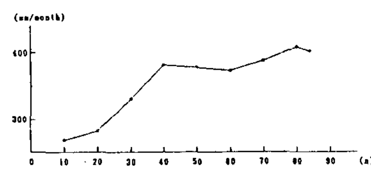
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}\,x}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln x-\lambda)^2}{\zeta}\right\} \qquad (1)$$

いま，確率変数 $(\tilde{\lambda},\tilde{\zeta})$ の事前確率分布に

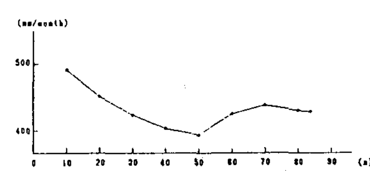
$$f(\lambda,\zeta)=1/\{(\lambda_2-\lambda_1)(\zeta_2-\zeta_1)\} \qquad (2)$$

なる一様分布を仮定すると，$\tilde{x}(n)=x(n)$ が得られた後の $(\tilde{\lambda},\tilde{\zeta})$ の事後確率分布は，次式のように更新される。

$$f(\lambda,\zeta\mid x(n))=\frac{1}{K\zeta^{n/2}}\exp(A) \qquad (3)$$



a). 松本の６月の月降水量



b). 松本の９月の月降水量

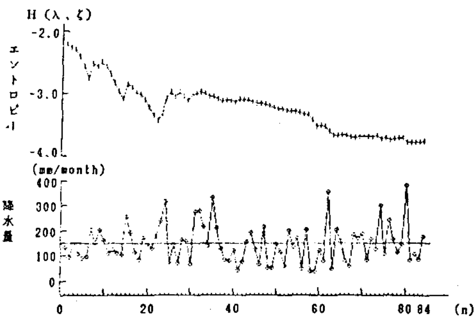
Fig.1　超過100 年確率水文量と資料数

従って，事後確率分布のエントロピーは，次式で与えられる。

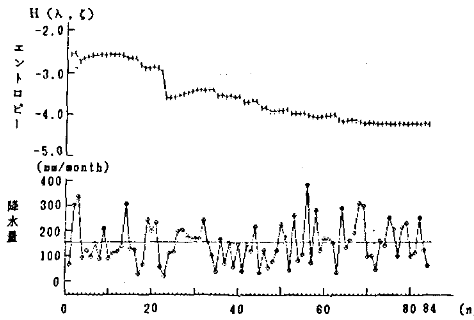
$$H(\lambda,\zeta)=\ln K-\frac{nI_1}{2K}+\frac{I_2\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2}{2K}-\frac{I_3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{K}+\frac{nI_4}{2K} \qquad (4)$$

ただし，(3),(4)式の K，I_1，I_2，I_3，I_4，A は，次式で表される。

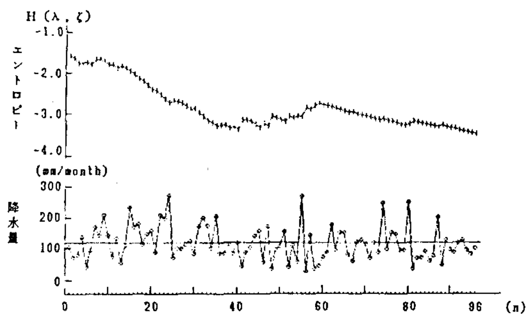
$$\left.\begin{aligned}
&K=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{1}{\zeta^{n/2}}\cdot\exp(A)\,d\zeta\,d\lambda\ , \quad I_1=-\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\ln\zeta}{\zeta^{n/2}}\cdot\exp(A)\,d\zeta\,d\lambda\\
&I_2=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{1}{\zeta^{n/2+1}}\cdot\exp(A)\,d\zeta\,d\lambda\ , \quad I_3=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\lambda}{\zeta^{n/2+1}}\cdot\exp(A)\,d\zeta\,d\lambda\\
&I_4=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\lambda^2}{\zeta^{n/2+1}}\cdot\exp(A)\,d\zeta\,d\lambda\ , \quad A=-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2}{2\zeta}+\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{\zeta}-\frac{n\lambda^2}{2\zeta}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$



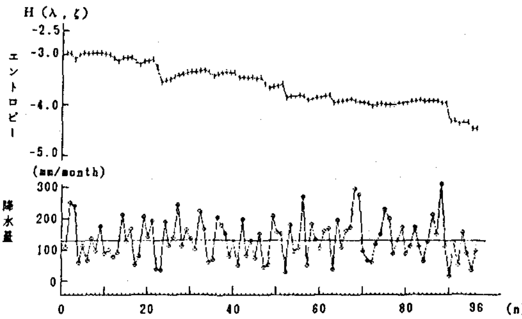
a). 松本の６月の月降水量



b). 松本の９月の月降水量



c). 長野の６月の月降水量



d). 長野の９月の月降水量

Fig.2　資料数とエントロピー

4．実測資料への適用

計算には，月降水量を用い，事前情報である λ_1，λ_2，ζ_1，ζ_2 は，次のようにして設定した。まず，全観測資料を10個ずつの組に分け，その各々の組に対して積率法を用いて λ と ζ を推定し，その中の最小値を λ_1，ζ_1，最大値を λ_2，ζ_2 とした。尚，観測資料数は，観測した年代の新しい資料から順番に n = 1,2,･･･ とした。Fig.2 は，資料数増加に伴うエントロピーの変動と月降水量の経年変化を図にしたものである。これより，エントロピーの変動のし方はａ）～ｄ）でそれぞれ異なっているが，全体的に見ると資料数が増加するに従いエントロピーの値は減少している，つまり推定母数の信頼性は増加していることがわかる。又，資料数が60個を超すとエントロピーの値は，大きな変動をせず比較的安定していく傾向が見うけられるが，ｄ）のように資料数が90個近くになってもなお大きな変動をする場合もある。

5．おわりに

以上，対数正規分布の２つの母数を共に未知として，推定母数の信頼性と資料数との関係をエントロピーを用いて明らかにした。今回，事前確率分布に一様分布を仮定したが，今後他の確率分布を導入できないか検討していきたい。

1)荒木，寒川，渡辺：確率分布の母数の不確定性評価法，59年度中部支部研究発表会講演集，1985年。
2)荒木，寒川，上原：指数分布・対数正規分布の母数推定の信頼性，60年度中部支部講演集，1986年。
3)上原，荒木，寒川：非正規母集団の推定母数の信頼性（その２），第41回土木学会年講，1986年。