I —29

クラックによるＳＨ波の散乱問題の解析

東海大学海洋学部　学生員　○寺田　宪次
東海大学海洋学部　正　員　　北原　道弘

1. はじめに

クラックによる波動の散乱特性，即ち，波動の指向性，開口変位，応力拡大係数などの動特性を知ることは，超音波による非破壊検査において，また破壊力学的にも重要な問題である。ここでは，ＳＨ波によるクラックの散乱特性について考えてみる。解析上の要点は次の４点にある。(1)開口変位を未知量とする２重層ポテンシャルを用いて積分方程式を組み立てる。(2)周波数域のグリーン関数を用い，(3)密度をチェビシェフ多項式で展開する。(4)これよりクラック面上の積分は解析的に評価できる。

2. クラックによる散乱問題

図１に示す長さ２aのクラックを考える。ＳＨ波に対する基礎式及び応力表現は次のようになる。

$$\mu(\Delta + k_T^2)\, u_3(\underset{\sim}{x}) = 0 \tag{1}$$

$$\sigma_{3j}(\underset{\sim}{x}) = \mu\, u_3(\underset{\sim}{x})_{,j} \qquad (j=1,2) \tag{2}$$

ここに，$k_T = \omega / c_T$（$c_T = \sqrt{\mu/\rho}$）である。クラック表面上での境界条件は次のように与えられる。

$$\sigma_{32}(x_1, 0^+) = \sigma_{32}(x_1, 0^-) = 0, \quad -a \le x_1 \le a \tag{3}$$

ここに，0^+及び0^-はそれぞれx_2の正の側と負の側からの極限値を表す。いま，散乱波に対する変位と応力場を次のように定義する。

$$\{u_3^s, \sigma_{3j}^s\} = \{u_3, \sigma_{3j}\} - \{u_3^I, \sigma_{3j}^I\} \tag{4}$$

ここに，u_3は全変位場，u_3^Iは入射波の変位場である。この散乱場u_3^sは無限遠で放射条件を満足しなければならない。

3. 積分方程式

２重層ポテンシャルによる散乱波の積分表現は次のようになる。

$$u_3^s(\underset{\sim}{x}) = \int_{S^+} \sigma_{3j}^G(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{y})\, n_j^+(\underset{\sim}{y})\, \Delta u_3(\underset{\sim}{y})\, dS_y \tag{5}$$

ここに，Δu_3はクラックの開口変位であり，入射波はクラック面上で連続であるから，

$$\Delta u_3(\underset{\sim}{y}) = \Delta u_3^s(\underset{\sim}{y}) = \{u_3^s(\underset{\sim}{y})\}^+ - \{u_3^s(\underset{\sim}{y})\}^-, \quad \underset{\sim}{y} \in S^+ \tag{6}$$

と書ける。σ_{3j}^Gは応力に関するグリーン関数であり，グリーン関数u_3^Gを用いて次のように定義される。

$$\left.\begin{aligned} &\mu(\Delta + k_T^2)\, u_3^G(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{y}) = -\delta(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{y}) \\ &\sigma_{3j}^G(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{y}) = \mu \frac{\partial}{\partial y_j} u_3^G(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{y}) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

クラック面上で$\underset{\sim}{n}^+ = (0,1)$であるから，式(5)は次のように書ける。

$$u_3^s(\underset{\sim}{x}) = \int_{-a}^{a} \sigma_{32}^G(\underset{\sim}{x};y_1,0)\, \Delta u_3^s(y_1)\, dy_1 \tag{8}$$

上式を微分して，クラック面上の境界条件(3)を用いるとクラック面上で次の積分方程式を得る。

$$-\sigma_{32}^I(x_1, 0) = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-a}^{a} \sigma_{32}^G(x_1, x_2; y_1, 0)\, \Delta u_3^s(y_1)\, dy_1 \right\}_{x_2=0} \quad (-a \le x_1 \le a) \tag{9}$$

ここに，σ_{32}^Iは入射波による応力

$$\sigma_{32}^I(\underset{\sim}{x}) = \mu \frac{\partial}{\partial x_2} u_3^I(\underset{\sim}{x})$$

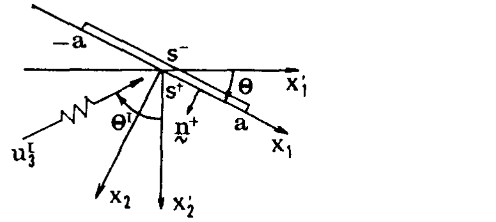


図１　長さ２aのクラックと入射波u_3^I

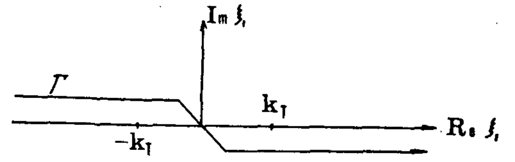


図２　積分路　Γ

であり，式(7)におけるグリーン関数u_3^Gを具体的に書き下しておくと次のようになる．

$$u_3^G(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{y})=\frac{i}{4\pi\mu}\int_\Gamma \gamma_T^{-1}e^{i\xi_1(x_1-y_1)+i\gamma_T|x_2-y_2|}d\xi_1 \tag{11}$$

ここに，

$$\gamma_T=\sqrt{k_T^2-\xi_1^2} \tag{12}$$

であり，分枝は $\mathrm{Im}\,\gamma_T>0$ となるように取る．図2は，この場合の積分路Γを示したものである。

4. 数値解析例

積分方程式(9)において，開口変位Δu_3^cを次のようなチェビシェフ多項式で展開すれば，

$$\Delta u_3^c(y_1)=-4i\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(y_1) \tag{13}$$

$$\psi_n(y_1)=\begin{cases}\cos\{n\sin^{-1}(y_1/a)\}, & n=\mathrm{odd}\\ i\sin\{n\sin^{-1}(y_1/a)\}, & n=\mathrm{even}\end{cases} \tag{14}$$

式(9)のクラック面上の積分は解析的に評価することができる．図3に開口変位を，図4に応力拡大係数を，図5にRADIATIONパターンの一例を示す．紙面の都合上，詳細については当日報告する．

図3 開口変位
(a) $\theta^I=0°$
(b) $\theta^I=30°$

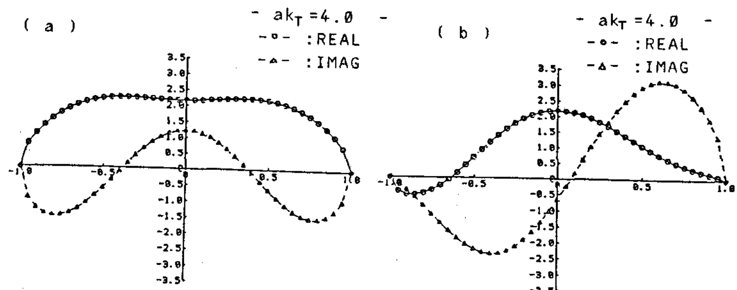
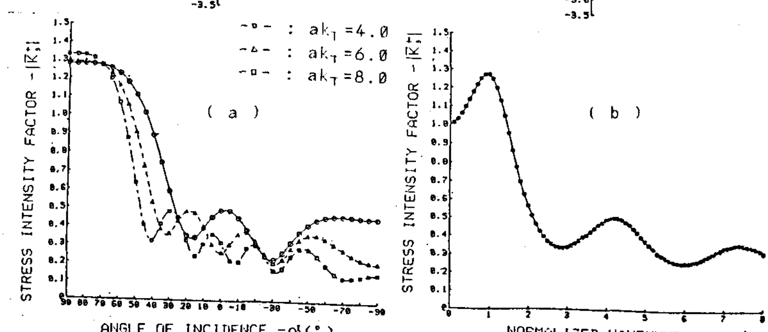
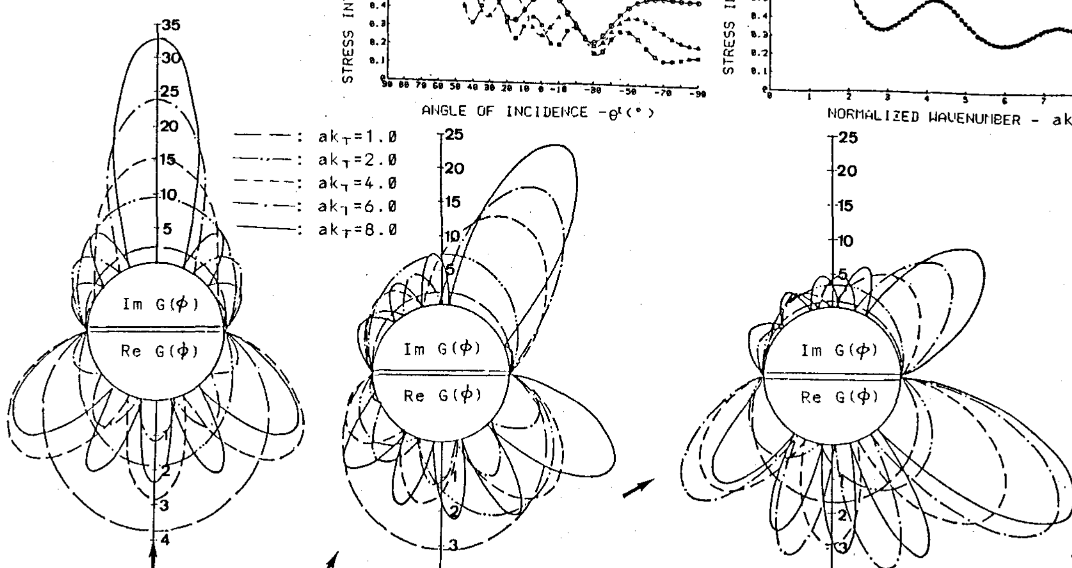


図4 応力拡大係数
(a) $\theta^I=0°$
(b) $ak_T=4,6,8$





(a) $\theta^I=0°$ (b) $\theta^I=30°$ (C) $\theta^I=60°$

図5 RADIATION パターン