固有値・固有モードのポアソン比依存性について

東海大学海洋学部　学生員　○伊藤圭一
東海大学海洋学部　正　員　　北原道弘

1.はじめに

弾性体の固有値及び固有モードのポアソン比依存性について定量的に議論した文献は見当らない。固有モードの場合は，その性格から議論は難しくここで示す資料は単なる参考としかならないが，固有値については明確にポアソン比依存性を示すことができる。ここでは無限に長い円柱の面内モードについて考察する。以下，1重層ポテンシャルにより解の積分表現を書き下し，これを解析的に積分することにより解析的に固有方程式及び固有モードの表示を求め，これらがポアソン比にどのように関係しているかについて考えてみる。

2.　1重層ポテンシャルの積分

対象とする弾性体の基礎式は次のようである。

$$\mathbf{L}\boldsymbol{u}=\mu\Delta\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\rho\omega^2\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

ここに ω は円振動数である。さて，変位場 $\boldsymbol{u}$ の1重層表現は次のようになる。

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\int_S \mathbf{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{2}$$

ここにSは境界，今の場合は円周であり，$\mathbf{U}$ は基本解

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{i}{4\mu}\left[H_0^{(1)}(k_TR)\mathbf{1}+\frac{1}{k_T^2}\nabla\nabla\left\{H_0^{(1)}(k_TR)-H_0^{(1)}(k_LR)\right\}\right] \tag{3}$$

である。ここに，k_T と k_L は横波と縦波の波数であり，$R=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ である。この1重層表現を解析的に積分するために，点 $\boldsymbol{x}$ について式(2)をフーリエ変換すると次のようになる。

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi})=-\mathbf{L}^{-1}(i\boldsymbol{\xi})\int_S e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{4}$$

ここに，$\boldsymbol{\xi}$ は $\boldsymbol{x}$ に対応するフーリエ変換域における位置ベクトルであり，また，$-\mathbf{L}^{-1}(i\boldsymbol{\xi})$ は式(1)に示した微分作用素のフーリエ変換域における逆作用素であり，具体的には次のように書ける。

$$-\mathbf{L}^{-1}(i\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{\mu}\left\{\frac{1}{\xi^2-k_T^2}-\frac{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}{k_T^2}\left(\frac{1}{\xi^2-k_T^2}-\frac{1}{\xi^2-k_L^2}\right)\right\} \tag{5}$$

ここに，$\xi=|\boldsymbol{\xi}|$ である。式(4)における1重層密度 $\boldsymbol{\varphi}$ を円周上のフーリエ級数

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^n e^{in\Theta} \tag{6}$$

に展開すると，式(4)は解析的に積分できて次のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi})=\frac{2\pi a}{\mu}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n\Big[&\frac{\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{\varphi}}{2}L^{+}(\xi)e^{in\theta_0}\\&-\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varphi}^n)}{4}L^{-}(\xi)e^{i(n+2)\theta_0}\\&-\frac{\overline{\boldsymbol{v}}(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\varphi}^n)}{4}L^{-}(\xi)e^{i(n-2)\theta_0}\Big]J_n(\xi a)\end{aligned} \tag{7}$$

ここに，a は円の半径，$L^{\pm}(\xi)$ は

$$L^{\pm}(\xi)=\frac{1}{\xi^2-k_T^2}\mp\beta\frac{1}{\xi^2-k_L^2} \tag{8}$$

$$\beta=k_L^2/k_T^2=(1-2\nu)/2(1-\nu)\quad, \tag{9}$$

$\boldsymbol{v}$ は　$\boldsymbol{v}=\mathbf{e}_1-i\mathbf{e}_2$（$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ は基底ベクトル）であり，θ_0 は $\boldsymbol{\xi}$ の偏角　$\boldsymbol{\xi}=\xi e^{i\theta_0}$ である。また，$J_n(\cdot)$ はベッセル関数である。式(7)を逆変換すれば式(2)の解析的積分が得られるわけであるが，これは最終的に次のようになる。

$$\begin{Bmatrix}u^{v}\\u^{\bar{v}}\end{Bmatrix}=\sum_n\frac{a\pi i}{8\mu}\begin{bmatrix}J_{n+1}(k_Tr)&-J_{n+1}(k_Lr)\\J_{n-1}(k_Tr)&J_{n-1}(k_Lr)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}H_{n-1}^{(1)}(k_Ta)&H_{n+1}^{(1)}(k_Ta)\\\beta H_{n-1}^{(1)}(k_La)&-\beta H_{n+1}^{(1)}(k_La)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi^n\\\overline{\Phi}^n\end{Bmatrix}e^{in\theta} \tag{10}$$

ここに，u^{v}，$u^{\bar{v}}$ は次の基底

$$\boldsymbol{V}=\mathbf{e}_r-i\mathbf{e}_\theta\ ,\quad\overline{\boldsymbol{V}}=\mathbf{e}_r+i\mathbf{e}_\theta \tag{11}$$

（$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ は極座標の基底）に関する成分であり，Φ^n, $\overline{\Phi}^n$ も密度 $\boldsymbol{\varphi}^n$ の基底(11)に関する成分である。また，$H_n^{(1)}(\cdot)$ はハンケル関数であり，rと θ は位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ の動径と偏角 $\boldsymbol{x}=re^{i\theta}$ である。

3．固有方程式と固有モード

たとえば固定境界の場合，式(10)で $r = a$ と置き $\{U^{v}(a), U^{\bar{v}}(a)\} = \{0, 0\}$ となる。ここで各 n について行列式を零と置けば，次の固有方程式を得る。

$$J_{n+1}(k_T a)J_{n-1}(k_L a) + J_{n-1}(k_T a)J_{n+1}(k_L a) = 0 \quad (12)$$

各 n に対して，この方程式の根として固有値ωが求められる。式(12)で注意すべきは，$k_T = \omega / C_T$, $k_L = \omega / C_L$ であるから本質的パラメータは円振動数ωである。k_T と k_L はポアソン比νを介して式(9)のように関連している。この意味において，固有値ωはポアソン比νに非線形的に関係しており，陽な関係式を求めることは不可能である。解析例ではνを与えて式(12)の根ωを数値的に求めることになる。こうしてもとまった固有値ωを式(10)に代入すると，式(10)は固有モードの表現式になる。ここでも，式(10)はポアソン比νに非線形的に関係している。

自由境界の場合にも，式(2)に対応する応力表現から出発して同様の積分法を取れば，最終的に次の固有方程式を得る。

$$\{J_{n+2}(k_T a) + J_{n-2}(k_T a)\} J_n(k_L a) - \frac{\beta}{\alpha}\{J_{n+2}(k_T a)J_{n-2}(k_L a) + J_{n-2}(k_T a)J_{n+2}(k_L a)\} = 0 \quad (13)$$

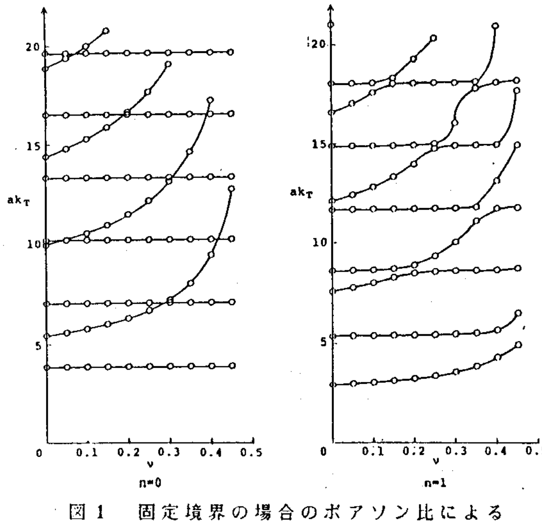

図1　固定境界の場合のポアソン比による固有値の変化（n＝0，1）

ここに

$$\beta / \alpha = 1 - 2\nu$$

である。式(13)より固有値が求まれば，固有モードはこの場合にも式(10)を用いて決めることができる。

4．解析例

図1に，固定境界の場合のポアソン比νによる固有値の変化の一例を示す。ただしここではωの代わりに，円の半径 a で無次元化した横波の波数 $ak_T = a\omega / C_T$ を固有値パラメータとして用いている。図では式(12)における n が 0 と 1 の場合だけを示しているが，一般的にνが増加すると固有値の値も増加する。自由境界の場合も同様な傾向にある。図2は自由境界の場合の固有モードを n＝7 に対する第1モードについてポアソン比をパラメータに取って示したものである。詳細については当日報告する。

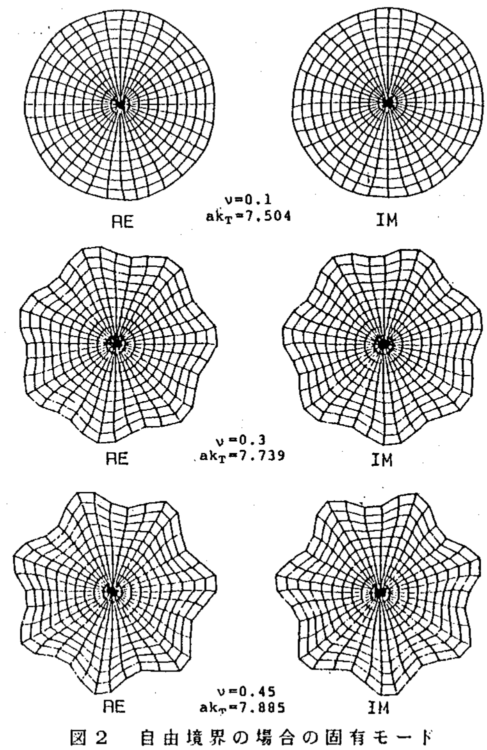

図2　自由境界の場合の固有モード（n＝7）