エシェルビーの方法による動弾性逆問題の解析

東海大学大学院　学生員　○萩川　康一
東海大学海洋学部　正　員　北原　道弘

1. 緒言

破壊力学と溶接に関係した逆問題の一つに、弾性体内にクラックあるいは異質物が存在する場合、クラックあるいは異質物周辺で得られたある種のデーターから、クラックや異質物の存在する位置と形状を決定する問題がある。本研究は、半無限弾性体内に異質の弾性係数を有する弾性介在物が存在するものとし、介在物の存在によって生じる半無限体表面での散乱波を入力データーとする積分方程式により、その位置と形状を求めようとするものである。なお、本逆問題に対する積分方程式の定式化には、エシェルビーの方法を用いている。

2. エシェルビーの方法[1)]

Fig. 1 に示すように、弾性係数 C_{ijkl} を持つ半無限母相 $D-\Omega$ の中に、弾性係数 C'_{ijkl} の領域 Ω がある場合を考える。このような領域 Ω を介在物と呼ぶことにする。介在物がないときの一様な外部応力による変位を u_i^A とし、それに対応する弾性ひずみを $(u_{i,j}^A+u_{j,i}^A)/2$ とする。これらが Ω の存在のために

$u_i^A+u_i$, $(u_{i,j}^A+u_{j,i}^A)/2+(u_{i,j}+u_{j,i})/2$ に変わったとする。また外部応力は介在物がないときの値 σ_{ij}^A から $\sigma_{ij}^A+\tau_{ij}$ に変わったものとする。すなわち

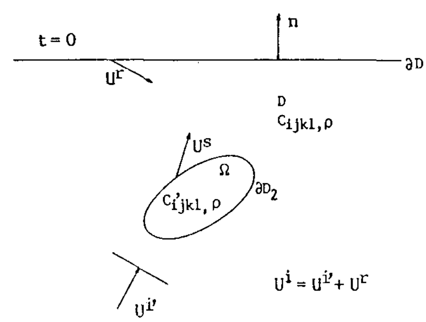

Fig.1 Semi-infinite exterior domain D and elastic inhomogeneity Ω

介在物が存在しない場合

$$\sigma_{ij}^A=C_{ijkl}(u_{k,l}^A+u_{l,k}^A)/2 \quad in\ D \quad (1)$$

介在物 Ω が存在する場合

$$\sigma_{ij}^A+\tau_{ij}=C_{ijkl}\left(\frac{u_{k,l}^A+u_{l,k}^A}{2}+\frac{u_{k,l}+u_{l,k}}{2}\right) \quad in\ D-\Omega \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^A+\tau_{ij}=C'_{ijkl}\left(\frac{u_{k,l}^A+u_{l,k}^A}{2}+\frac{u_{k,l}+u_{l,k}}{2}\right) \quad in\ \Omega \quad (3)$$

の関係がある。いま外部応力の乱れ分 τ_{ij}、そのひずみの乱れ分 $(u_{k,l}+u_{l,k})/2$、その変位の乱れ分 u_i を、Ω と同じ形状を有しているが、母相と同じ弾性係数をもち、かつ適当なひずみ（Eigenひずみと呼ばれる）ε_{ij}^* をもつ介在物の作る応力、全ひずみ、変位によって再現することを考える。再現にあたり Ω の中では

$$\tau_{ij}=C_{ijkl}\left\{(u_{k,l}+u_{l,k})/2-\varepsilon_{kl}^*\right\} \quad (4)$$

とならなければならない。

(1) 式と (4) 式を重ねると Ω の中では

$$\sigma_{ij}^A+\tau_{ij}=C_{ijkl}\left(\frac{u_{k,l}^A+u_{l,k}^A}{2}+\frac{u_{k,l}+u_{l,k}}{2}-\varepsilon_{kl}^*\right) \quad (5)$$

となる。

この (5) 式が (3) 式と等しいためには

$$C'_{ijkl}\left(\frac{u_{k,l}^A+u_{l,k}^A}{2}+\frac{u_{k,l}+u_{l,k}}{2}\right)=C_{ijkl}\left(\frac{u_{k,l}^A+u_{l,k}^A}{2}+\frac{u_{k,l}+u_{l,k}}{2}-\varepsilon_{kl}^*\right) \quad (6)$$

が成立しなければならない。すなわち (6) 式を満足する Eigen ひずみを導入し、この分布状態を調べることにより、介在物の位置と形状を知ることができる。

3. 積分方程式[2)]

Fig. 1 における定常動弾性問題の Navier-Cauchy 式は

$$C^0_{ijkl}(U^I_{k,lj}+U^S_{k,lj})+\rho\omega^2(U^I_i+U^S_i)=0 \qquad \begin{cases} C^0_{ijkl}=C_{ijkl} & \text{in } D-\Omega \\ C^0_{ijkl}=C'_{ijkl} & \text{in } \Omega \end{cases} \qquad (7)$$

となる。

また(4)式～(6)式の関係を使うことで(7)式を次のように表わすことができる。

$$C_{ijkl}U^I_{k,lj}+\rho\omega^2 U^I_i=0 \qquad (8)$$

$$C_{ijkl}U^S_{k,lj}+\rho\omega^2 U^S_i=C_{ijkl}\varepsilon^*_{kl,j} \qquad (9)$$

in D

さらに(9)式を次のように表わす。

$$C_{ijkl}(U^S_{k,lj}-\varepsilon^*_{kl,j})+\rho\omega^2 U^S_i=0 \qquad \begin{cases} \varepsilon^*_{kl}=0 & \text{in } D-\Omega \\ \varepsilon^*_{kl}\neq 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \qquad (10)$$

Eigenひずみ ε^*_{ij} は介在物の存在する位置に分布しているものと考え、(10)式をもとに散乱波 U^S による定式化を行なう。ここで基本解を次のように定義する。

$$C_{ijkl}G^m_{k,lj}(x-y)+\rho\omega^2 G^m_i(x-y)=-\delta_{im}\delta(x-y) \qquad (11)$$

Maxwell-Bettiの相反定理より

$$C_{ijkl}(U^{Sk,l}(y)-\varepsilon^{*kl}(y))\,G^{m,j}_i(x-y)=C_{ijkl}G^{m,l}_k(x-y)(U^{Si,j}(y)-\varepsilon^{*ij}(y)) \qquad (12)$$

を得る。

(12)式を領域Dにわたり積分を行ない、発散定理を適用すると

$$\int_{\partial D}C_{ijkl}(U^{Sk,l}(y)-\varepsilon^{*kl}(y))n^jG^m_i(x-y)\,dS+\int_D C_{ijkl}(U^{Sk,lj}(y)-\varepsilon^{*kl,j}(y))\,G^m_i\,d(y) \qquad (13)$$
$$=-\int_{\partial D}C_{ijkl}G^{m,l}_k(x-y)n^jU^{Si}(y)\,dS+\int_D C_{ijkl}G^{m,lj}_k(x-y)U^{Si}(y)\,d(y)-\int_D C_{ijkl}G^{m,l}_k(x-y)\varepsilon^{*ij}(y)\,d(y)$$

と表わすことができる。さらに、境界条件(Free Boundary : $t=0$)、(10)式、(11)式を考慮すると(13)式は次式の形となる。

$$\frac{1}{2}U^S_m(x)=-\int_{\partial D}T^i_m(x-y)U^{Si}(y)\,dS-\int_D D^{ij}_m(x-y)\varepsilon^{*ij}(y)\,d(y) \quad : x\in\partial D \qquad (14)$$

$T^i_m(x-y)=C_{ijkl}G^{m,l}_k(x-y)n^j$ ：二重層

$D^{ij}_m(x-y)=C_{ijkl}G^{m,l}_k(x-y)$ ：一重層応力　　$G^m_k(x-y)=G^k_m(x-y)$: k, m は対称

このようにして得られた(14)式を、与えられた $U^S(x)$ のもとで $\varepsilon^*(y)$ について解けば、$\varepsilon^*(y)$ の分布、即ち、介在物の位置と形状が求められることになる。

4. 数値解析について

今、Fig. 2 に示すように、ある弾性係数 C_{ijkl} を持つ領域Dの内部に異なる弾性係数 C'_{ijkl} を持つ介在物が存在するモデルを仮定する。このモデルに対して動的応答解析を行ない、逆問題解析を行なうときに必要なデーターとなる散乱波変位 U^S を、図中の半無限境界 ∂D 上に図示している。この散乱波変位 U^S を用いて(14)式を離散化し、$\varepsilon^*(y)$ についての方程式を作成する。この方程式を解き、ε^* の分布状態を調べることによって介在物の位置と形状を知ることができる。計算結果については、当日会場にて報告する。

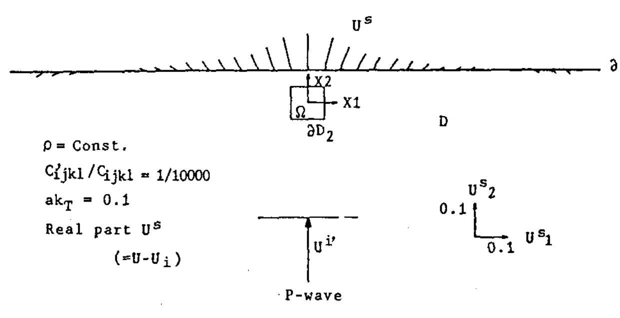

Fig.2　U^S on ∂D for the vertical incidence of plane P-wave

〈参考文献〉
1) Mura, T; Micromechanics of Defects in Solids; Martinus Nijhoff; The Hague; 1982
2) Mura, T., Cox, B. and Gao, Z.; Computer-aided nondestructive measurements of plastic strains from surface displacement; in Computational Mechanics '86, eds. S.N. Atluri and G. Yagawa, Springer-Verlag, Tokyo, II (1986) 43-48.