

剛体変位除去の手法の局所座標系が精度に及ぼす影響

名古屋工業大学 学生員 ○春日井俊博
名古屋工業大学 正 員 後藤 芳朗
名古屋工業大学 正 員 松浦 聖

1. まえがき：有限変位解析における剛体変位除去の手法は全ラグランジュの手法に比べ、離散化解析の定式化が比較的容易で、しかも大きな変位挙動まで追跡しうるので実用的な解析では最も多く用られるが、その定式化が一部物理的近似に基づくため、精度のみならず理論的根拠については、従来必ずしも明らかでなかった。著者らは、剛体変位除去の手法を用いて、効率的な計算を行なうための指針を提示することを目的として、平面、立体骨組を対象に、これらの問題を理論的に明らかにしてきた。しかしながら、先の論文では、理論的検討の容易さから、Fig.1(a)に示すような、変形後の要素節点 i の接線方向に局所座標軸 $\hat{z}$ を選ぶ場合を扱っており、通常の解析で最も多く用いられる局所座標軸 $\hat{z}$ を要素節点 i と $i+1$ とを結ぶ割線方向に選ぶFig.1(b)のような場合についてはいまだ検討がなされていない。したがって、本報告では、平面構材を対象に局所座標系を割線方向へ選ぶ場合の精度特性が、接線方向に選ぶ場合に比べ、どのように変化するかを理論的に検討する。さらに、この理論的検討結果を著者らによって誘導された収束解に対応した厳密解と見なしうる各種積分分解をもとに、数値計算により検証する。

2. 検討事項：Fig.1に示す2種類の局所座標系に、Table 1に示す剛体回転除去後の局所座標系での4種類の支配方程式を用いた場合について理論的に検討する。Table 1の支配方程式のうち、c)線形化はり・柱の式 とは b) はり・柱の式の軸力-変位関係式において、非線形項を無視した式で、物理的にはいわゆるBowlingの効果 を無視したことに相当する。また、d)の式は、文献1)で、収束解が有限ひずみ・有限変位の式の解と一致する最低次の非線形形式として示されているものである。検討手法としては、支配微分方程式の解に相当する有限要素両端の物理量 Q_j の関係を式(1)のように収束に関するパラメータである要素長 ΔL のべき級数表現で求め、このべき級数係数 $Q_j^{(n)}|i$ の比較を行なうことによる。

$$Q_j|i+1 = Q_j|i + \sum_{n=1}^{\infty} Q_j^{(n)}|i \Delta L^n / n! \quad (1)$$

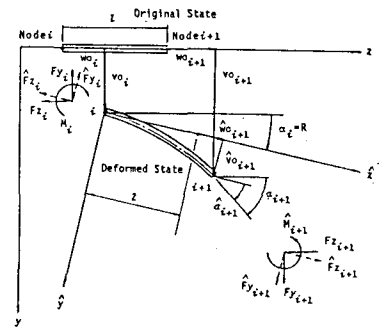
$$\{Q_j\} = \{F_y, F_z, M, v_o, w_o, \alpha\} \quad (2)$$

なお、剛体変位除去後の回転角は最も単純な $\hat{v}_o' = \hat{\alpha}$ で評価する。

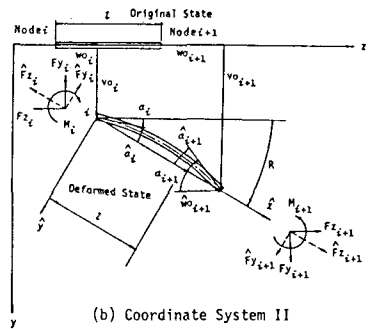
Table 1 Governing Equations for Local Coordinate

Theories	Equilibrium Equations	Stress Resultants vs. Displacements
a) Small Displacements	$M''=0$ $N'=0$	$M=-EI\hat{v}_o''$ $N=EA\hat{w}_o'$
b) Beam-Column	$(N\hat{w}_o' + M')'=0$ $N'=0$	$M=-EI\hat{v}_o''$ $N=EA(\hat{w}_o' + \frac{1}{2}\hat{v}_o'^2)$
c) Linearized Beam-Column	$(N\hat{w}_o' + M')'=0$ $N'=0$	$M=-EI\hat{v}_o''$ $N=EA\hat{w}_o'$
d) Eq. given by Ref.1)	$\begin{pmatrix} M' \\ 1+\hat{w}_o' \end{pmatrix} = 0$ $N'=0$	$M=-EI\hat{v}_o''$ $N=EA\hat{w}_o'$

E=Young's Modulus, A=Cross Sectional Area,
I=Moment of Inertia, N=Axial Force,
M=Bending Moment



(a) Coordinate System I



(b) Coordinate System II

Fig.1 Coordinate System of a Beam Element

3. 理論的検討結果：局所座標系として、座標系Ⅰ、座標系Ⅱを用いた場合の各種物理量に関するべき級数係数の厳密解に対する一致性状をそれぞれ Table 2, Table 3 に示す。両者を比較してわかるように、座標系Ⅱを用いた場合には、べき級数係数の一致性状がかなり向上しており、局所系の式にどの理論の式を用いても、また軸線の伸張、不伸張の仮定にかかわらず、いずれも少なくとも2次の近似解となっている。この中で、特に、a) 微小変位の式を用いた場合、ならびに d) の式を用いた場合のべき級数係数の一致性状の向上が著しい。

4. 数値的検証：数値的検討の対象は、片持りの自由端に微小な初期モーメント $M L / E I = 0.01$ と軸圧縮力として、座屈荷重を越える $P_z L^2 / E I = 3.05$ を作用させる。細長比は、d) 式では微小ひずみの解と有限ひずみの解に差の現れる $\lambda = 4$ とし、他の式では一般的な $\lambda = 100$ とした。局所座標系の差による解の収束性を、剛体変位除去後の支配方程式の種類ごとにまとめて Fig.2 に示す。これより、全般にわたって明らかに座標系Ⅱを用いた方の精度が良く、特に、局所系の式として a) d) 等の低次の式を用いた場合に精度の向上が著しい。

以上の数値計算結果は、理論的検討結果の妥当性を示すものである。

参考文献：1) 後藤、長谷川、西野、土木学会論文報告集、No.331, 1983. 2) Goto, Y., A.Hasegawa and F.Nishino, Proc. of JSCE, No.344, 1984. 3) Goto, Y., A.Hasegawa, F.Nishino and S.Matsuura, Proc. of JSCE, No.356, 1985. 4) 後藤、山下、松浦、構造工学論文集、No.32A, 1986.

Table 2 Number of Coincident Terms in Power Series Expansion with the Adoption of Coordinate System I

Local Governing Eqs.	Convergent Solutions	M	Vo	Wo	α
a) Small Displacements	with Small Strains	1(1)	1(2)	1(2)	2(2)
b) Beam-Column		2(2)	1(3)	1(3)	3(3)
c) Linearized Beam-Column		2(2)	1(2)	1(2)	3(3)
d) Eq. given by Ref. 1)	with Finite Strains	1(1)	1(2)	1(2)	2(2)

(): Inextensional Beam Axis

Table 3 Number of Coincident Terms in Power Series Expansion with the Adoption of Coordinate System II

Local Governing Eqs.	Convergent Solutions	M	Vo	Wo	α
a) Small Displacements	with Small Strains	2(2)	2(2)	2(2)	2(2)
b) Beam-Column		2(2)	2(3)	2(3)	3(3)
c) Linearized Beam-Column		2(2)	2(2)	2(2)	3(3)
d) Eq. given by Ref. 1)	with Finite Strains	2(2)	2(2)	2(2)	2(2)

(): Inextensional Beam Axis

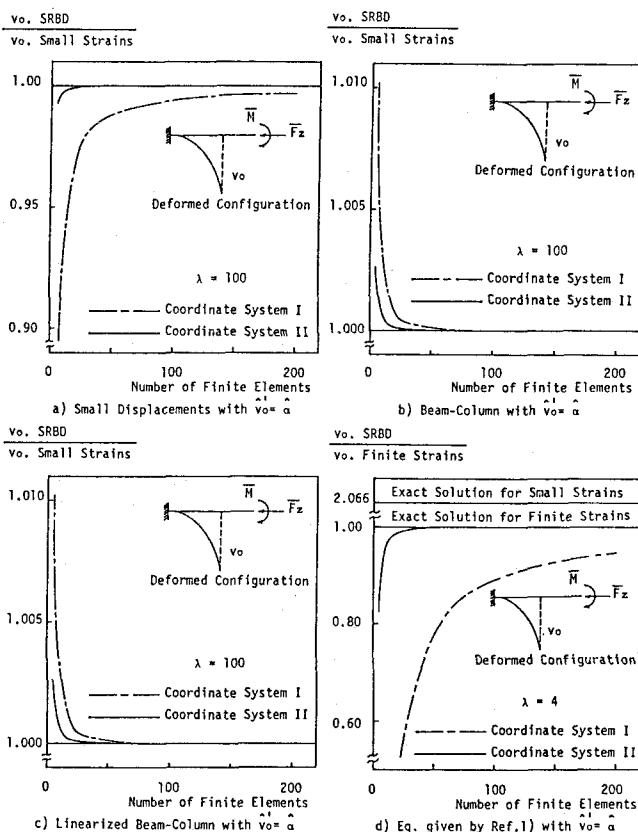


Fig.2 Effect of Coordinate System on Convergence