I —10

伝達マトリックス法による任意曲線部材の有限変位理論

岐阜大学　学生員　○廣瀬　康之
岐阜大学　学生員　塩谷　浩英
東京大学　　　　　龔　三峡
岐阜大学　正　員　藤井　文夫

1、はじめに

直線はり部材に対する伝達マトリックス法のField Matrixは既によく知られているが、本研究では任意曲線部材に関するField Matrixを導いてみた。通常の変位型有限要素法において、曲線部材を開発する際の問題点の一つは、変位場の中で収束条件としての剛体変位が正確に含まれるか否かを論ずることである。伝達マトリックス法を用いた定式化の中では、簡単な幾何学的考察からこの問題を回避できることを示し、微分方程式からスタートすることなく、エネルギー法によって容易にField Matrixが得ることができた。このField Matrixは部材の曲線形状に依存し、形状表現が正確で、積分が容易な直線や円弧部材などについては厳密解を与える。多項式を用いて曲線形状を補間表現した場合でも精度の高い結果が得られる。

2、Field Matrix

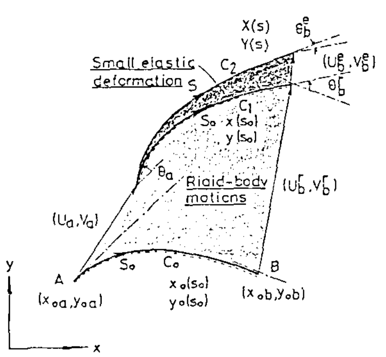


Fig. 1 Configurations of a curved element

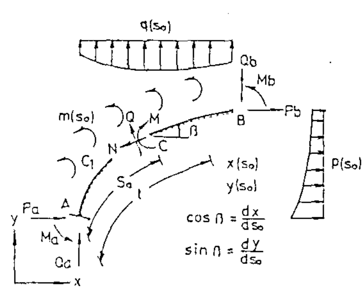


Fig. 2 Equilibrium in C_1

任意の曲線要素ＡＢの変位を剛体変位と弾性変形の２つに分けて考える。Fig.1ではC_0が初期状態で，C_1が剛体変位後の位置である。C_1からさらに微小弾性変形して、最終的な曲線部材の変形形状をC_2とする。剛体変位部分は簡単な幾何学的考察から求めることができ、Ａ端の変位を部材全体の剛体変位パラメーターにとると、Ｂ端の剛体変位は容易に表現することができる。次に、弾性変形については、Ａ端を固定した状態で Castigliano's theoremを用いれば、Ｂ端の断面力とＢ端の変位との間の関係を表すことができる（Fig.２）。更に、Ｂ端の節点断面力は、C_1状態（Fig.２）での力のつり合いから、Ａ端の節点断面力で表現することができる。

以上のようにして、節点Ａから節点Ｂに状態量を伝達する区間伝達マトリックス表現は次のようになる。

$$
\begin{bmatrix} P_b \\ Q_b \\ M_b \\ U_b \\ V_b \\ \theta_b \\ 1 \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cc:c}
B & O & \begin{matrix} P_d \\ Q_d \\ M_d \end{matrix} \\ \hdashline
DE & F & \begin{matrix} U_d \\ V_d \\ \theta_d \end{matrix} \\ \hdashline
000 & 000 & 1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} P_a \\ Q_a \\ M_a \\ U_a \\ V_a \\ \theta_a \\ 1 \end{bmatrix}
$$

上式の係数マトリックスがField Matrixである。ここで、このマトリックスの部分行列については次のようである。

［R］：C_0からC_1へ剛体変位する場合、B端の変位をA端の変位で表すときに用いるマトリックス

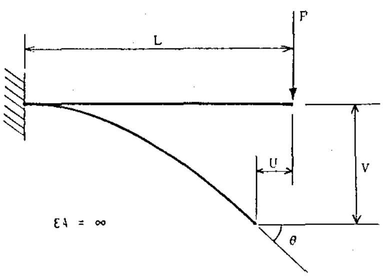
［E］：C_1においてつり合い状態を考えたとき、B端の断面力をA端の断面力によって表すために用いるマトリックス

［D］：C_1からC_2への弾性変形によるB端の変位をB端の断面力で表すために用いるマトリックス

７列目は中間荷重が作用した場合のために加えたものであり、７行目は計算上のために付け加えられたものである。これら３つの部分行列は初期形状C_0に依存して導かれるので、C_0の表現が厳密なものであれば、導かれるField Matrixも厳密な解を与えることができる。また部分行列［D］を計算する際にエネルギー積分を考えなければならないが、これは部材の曲線形状に依存する。そこで、本研究では曲線形状を blending functionを用いて、形状補間することを行い、任意形状の曲線への対応を可能にした。

３、計算例

もっとも簡単な直線部材を用いて計算した例を示す。他の曲線部材については講演当日に発表する予定である。



PL²/EI	Transfer matrix method (20 elements)			results of 2)			Exact		
	U/L	V/L	θ	U/L	V/L	θ	U/L	V/L	θ
1.0	0.0561	0.3025	0.4624	0.0563	0.3018	0.463	0.05643	0.30172	0.46135
2.0	0.1609	0.4962	0.7861	0.1605	0.4938	0.785	0.16065	0.49346	0.78175
3.0	0.2560	0.6076	0.9934	0.2542	0.6038	0.990	0.25442	0.60325	0.98602

４、あとがき

伝達マトリックス法におけるField Matrixは、通常の変位型ＦＥＭにおける要素剛性マトリックスに相当するものであるが、本研究では、全変位が、剛体変位部分と、弾性変形部分とに２つに明確に分離できることに注目して導いている。これは、曲線部材では難しいとされている剛体変位を正確に含むという点において、有効な手法であると言える。また、blending functionを導入することにより、任意形状の系が比較的簡単で高精度に計算される点も注目に値する。

《参考文献》

1) E.C.Pestle and F.A.Leckie:"Matrix Methods in Elastomechanics",McGraw-Hill,NewYork(1963)

2) Fumio Fujii:"A simple mixed formulation for elastica problems",Computers and Structures Vol.17,No.1. 1983.pp.79-88

3) San-Xia Gong:"Transfer matrix method applied to finite displacement theory of arbitrary arches" ,Gifu Univ.,Master Thesis, 1986