不確定条件下における公共投資に関する基礎的考察

信州大学工学部　正　員　奥谷　巖
信州大学工学部　学生員　○柳沢吉保

1．はじめに

道路，鉄道等の公共施設整備による地域に及ぼす影響の予測・研究を行なう場合，経済効果の計測については計量経済モデルが用いられてきた。それは，政策的意図を反映した条件付き予測であり，目標変数の数値が政府の意図とくい違った場合は，政策変数等を試行錯誤的に動かすしかなく，信頼性等の点で問題点があった。これらの問題点を解消するための最適化問題の定式化については，先に試みた[1]。しかしその報告では経済の動きの中にある不確定現象が平均値により表わされており，実質的には，確定条件下における考察であった。本研究においては，先の経済効果の最適化問題を，不確定条件の下において定式化することを試み，考察を行なう。

2．動的な確率システムの定式化

まず最初に，対象とする地域の経済システムを，統計的な計量経済モデルで表わすことを考える。いま，t 期における内生変数を $X(t)$，外生変数を $V(t)$，投資量を表わす政策変数を $Y(t)$ とすると

$$X(t)=A_1X(t)+\sum_{m=1}^{M}A_2(m)X(t-m)+\sum_{m=1}^{M}B_1(m)Y(t-m)+\sum_{m=0}^{M}C_1(m)V(t-m)+D'+\varepsilon'(t) \tag{1}$$

のような一般的な関係式を書くことができる。ここで，$X(t), Y(t), V(t)$ をそれぞれ n_1, p, n_2 次元ベクトルとしたとき，$A_1, A_2(m)$ は $n_1\times n_1$，$B_1(m)$ は $n_1\times p$，$C_1(m)$ は $n_1\times n_2$ のパラメータ行列であり，D' は n_1 次元の定数ベクトル，$\varepsilon'(t)$ は n_1 次元の誤差ベクトルである。式(1)をもとに誘導型の方程式を導くと

$$X(t)=\sum_{m=1}^{M}A(m)X(t-m)+\sum_{m=1}^{M}B(m)Y(t-m)+\sum_{m=0}^{M}C(m)V(t-m)+D+\varepsilon(t) \tag{2}$$

ここに，$A(m)=[I-A_1]^{-1}A_2(m)$，$B(m)=[I-A_1]^{-1}B_1(m)$，$C(m)=[I-A_1]^{-1}C_1(m)$，$D=[I-A_1]^{-1}D'$，$\varepsilon(t)=[I-A_1]^{-1}\times\varepsilon'(t)$ である。いま

$$X_k(t)=\sum_{i=1}^{M-k}A(k+i)X(t-i)+\sum_{i=1}^{M-k}B(k+i)Y(t-i)+\sum_{i=0}^{M-k}C(k+i)V(t-i)\quad(k=1,2,\cdots,M-1) \tag{3}$$

とおくと　$X_k(t)=X_{k+1}(t-1)+A(k+1)X(t-1)+B(k+1)Y(t-1)+C(k+1)V(t-1)\quad(k=1,\cdots,M-2)$ (4)

$X_{M-1}(t)=A(M)X(t-1)+B(M)Y(t-1)+C(M)V(t-1)$ ---(5) となるが，ここで $X_0(t)=X(t)$ とおき，さらに，$x_t=(X_0(t)^T, X_1(t)^T,\cdots, X_{M-1}(t)^T)^T$，$u_t=Y(t)$，$v_t=(V(t+1)^T, V(t)^T)^T$，$U=(D'^T, 0, 0, \cdots, 0)^T$，$\xi_{t-1}=(\varepsilon(t)^T, 0, 0, \cdots, 0)^T$ とすると式(2)〜(5)は

$$x_t=\Psi x_{t-1}+\Gamma u_{t-1}+\Phi v_{t-1}+U+\xi_{t-1} \tag{6}$$

と書くことができる。$n=n_1\cdot M$ とすると，x_t，U，ξ_{t-1} は，ともに n 次元ベクトルであり，Ψ, Γ, Φ はそれぞれ，$n\times n$，$n\times p$，$n\times 2n_2$ 次元のパラメータ行列であり，$A(m), B(m), C(m)$ によって表わされる。

いま，目的関数が $J=\sum_{t=1}^{N}\phi_t=\sum_{t=1}^{N}\{a_t x_t+g_{t-1}u_{t-1}\}$ ---(7) と与えられた場合，(7)式を最適にする u_t を求めることとする。ここで，$\Psi, \Gamma, \Phi, U, \xi_{t-1}$ などが確率変数とすると，(6)式の x_t も確率変数となるため，(7)式の期待値をとったものを評価基準としなければならない。よってここでは $E(J)=\sum_{t=1}^{N}E(a_t x_t+g_{t-1}u_{t-1})$ --(8) を最小にする $u_0, u_1, \cdots u_{N-1}$ を $H_t(x_t, u_t)\leqq 0, (t=0\sim N-1)$ ---(9) のような制約条件の下で求める。

(a)　誤差項の確率分布を考慮する場合

最後の期間について，$E(\phi_N)$ の最小化を行なう。

$$E[a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1}\mid x^{N-1}, u^{N-2}]=\int(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1})p(x_N, u_{N-1}\mid x^{N-1}, u^{N-2})\,d(x_N, u_{N-1}) \tag{10}$$

ここで　$p(a, b\mid c)=p(b\mid c)\,p(a\mid b, c)$ (11)

を用い，$p(u_{N-1}\mid x^{N-1}, u^{N-2})=\rho_{N-1}(u_{N-1})$ とおくと(10)式は $\int(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1})p(x_N\mid x^{N-1}, u^{N-1})\rho_{N-1}(u_{N-1})\,d(x_N, u_{N-1})$

と書き換えられる。ここで $\lambda_N=\int(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1})\times p(x_N|\chi^{N-1};u^{N-1})dx_N$ と定義すると，(10)式は

$$E(\phi_N|\chi^{N-1};u^{N-2})=\int\lambda_N p_{N-1}(u_{N-1})du_{N-1} \qquad (12)$$

と書ける。λ_Nはx_{N-1}とu_{N-1}の関数となるが，χ^{N-1}とu^{N-2}が与えられているものとすると，u_{N-1}のみの関数となり，u_{N-1}に関して最小化できる。いまその最小解をu_{N-1}^*とし，かつ$\nu_N^*=\min_{p_{N-1}}E(\phi_N|\chi^{N-1};u^{N-2})$のように定義すると，最適な$p_{N-1}$は$\delta(u_{N-1}-u_{N-1}^*)$となる。ここで最終期間について，$u_{N-1}^*$を求める。

$$\lambda_N=\int a_N x_N p(x_N|\chi^{N-1};u^{N-1})dx_N+g_{N-1}u_{N-1}$$
$$=a_N\Psi x_{N-1}+(a_N\Gamma+g_{N-1})u_{N-1}+a_N(\Phi v_{N-1}+\Upsilon+\theta_1) \qquad (13)$$

これを(9)式の下に解けばよい。u_{N-1}^*は一般に

$u_{N-1}^*=A_{N-1}x_{N-1}+b_{N-1}$ ⋯(14)と表わされる。式(14)を(13)に代入すると，$\nu_N^*=a_N'x_{N-1}+b_{N-1}'$ ⋯(15)となる。次に

最後から2つの期間について最適化を行なう。すなわち，$E[\phi_{N-1}+\phi_N^*|\chi^{N-2};u^{N-3}]$について最小化する。

$$\min_{p_{N-2}}E[\phi_{N-1}+\phi_N^*|\chi^{N-2};u^{N-3}]=\min_{p_{N-2}}\{E[\phi_{N-1}|\chi^{N-2};u^{N-3}]+E[\phi_N^*|\chi^{N-2};u^{N-3}]\}=\min_{p_{N-2}}\int\nu_{N-1}p_{N-2}\,du_{N-2} \qquad (16)$$

のようになることがわかる。ここに

$$\nu_{N-1}=\lambda_{N-1}+\int\nu_N^*p(x_{N-1}|\chi^{N-2};u^{N-2})dx_{N-1} \qquad (17)$$

となり，式(17)に式(15)を代入して計算を進める。

一般的な期間kについて記述すると，

$$\nu_k=\hat a_k\Psi x_{k-1}+(\hat a_k\Gamma+g_{k-1})u_{k-1}+\hat b_k \qquad (18)$$

を式(9)の下に最小化することによって，

$u_k^*=A_{k-1}x_{k-1}+b_{k-1}$ ⋯(19)のように求められる。

ただし，$\hat a_k=a_k+\hat a_{k+1}\Psi+(\hat a_{k+1}\Gamma+g_k)A_k$

$\hat b_k=(\hat a_{k+1}\Gamma+g_k)b_k+\hat a_k(\Phi v_{k-1}+\Upsilon+\theta_1)+\hat b_{k+1}$

$\hat a_{N+1}=0,\ g_N=0,\ \hat b_{N+1}=0,\ (k=1,\cdots,N)$ である。

以上により，線形の目的関数を線形の制約条件式と式(6)のような動的線形確率システムの下で最適化する場合，目的関数が式(8)のようになっている限り，初期値x_0と，誤差項ξ_kの期待値が与えられると，各期の最適政策変数が決定されることがわかる。このような性質は，不確実性を内在する問題の取り扱いを容易にできることがわかる。

(b) パラメータの確率分布を考慮する場合

最後の期間について，$E(\phi_N)$の最小化を行なう。

(a)の場合と同様にして

$$\lambda_N=\int(a_Nx_N+g_{N-1}u_{N-1})p(x_N|\chi^{N-1};u^{N-1})dx_N \qquad (19)$$

ここで，式(11)を用い$\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon$の変動も考慮に入れて式(19)を変形すると

$$\int(a_Nx_N+g_{N-1}u_{N-1})p(x_N|\chi^{N-1};u^{N-1},v^{N-1})dx_N$$
$$=\int(a_Nx_N+g_{N-1}u_{N-1})p(\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon,x_N|\chi^{N-1};u^{N-1};v^{N-1})\times d(\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon,x_N)$$
$$=\int(a_Nx_N+g_{N-1}u_{N-1})p(x_N|\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon,\chi^{N-1};u^{N-1};v^{N-1})\times p(\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon|\chi^{N-1},u^{N-1},v^{N-1})d(\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon,x_N)$$
$$=a_N(\bar\Psi_{N-1}x_{N-1}+\bar\Gamma_{N-1}u_{N-1}+\bar\Phi_{N-1}v_{N-1}+\bar\Upsilon_{N-1}+\theta_1)+g_{N-1}u_{N-1} \qquad (20)$$

ここで，$\bar\Psi_{N-1}=E(\Psi|\chi^{N-1})$，$\bar\Gamma_{N-1}=E(\Gamma|\chi^{N-1})$，$\bar\Phi_{N-1}=E(\Phi|\chi^{N-1})$，$\bar\Upsilon_{N-1}=E(\Upsilon|\chi^{N-1})$であり，

$\bar\Psi_{N-1},\bar\Gamma_{N-1},\bar\Phi_{N-1},\bar\Upsilon_{N-1}$については，式(11)を用いて

$$p(\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon|\chi^{N-1})=p(\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon|\chi^{N-2})$$
$$\times p(x_{N-1}|\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon,\chi^{N-2};u^{N-2};v^{N-2})/\{\int[分子]\times d(\psi,\gamma,\phi,\Upsilon)\} \qquad (21)$$

という関係式によって，求めることができる。ここで$p(\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon|\chi^{N-1})=\mathrm{const}\,\exp[-1/2\{(\psi-\bar\psi_{N-1})'\Sigma_{N-1}^{\psi\psi}(\psi-\bar\psi_{N-1})+(\psi-\bar\psi_{N-1})'\Sigma_{N-1}^{\psi\gamma}(\gamma-\bar\gamma_{N-1})+\cdots+(\Upsilon-\bar\Upsilon_{N-1})'\Sigma_{N-1}^{\Upsilon\Upsilon}(\Upsilon-\bar\Upsilon_{N-1})\}]$，$p(x_{N-1}|\Psi,\Gamma,\Phi,\Upsilon,\chi^{N-2};u^{N-2};v^{N-2})=\mathrm{const}\,\exp[-1/2\{x_{N-1}-\Psi x_{N-2}-\Gamma u_{N-2}-\Phi v_{N-2}-\Upsilon-\theta_1\}'\Sigma_1\{x_{N-1}-\Psi x_{N-2}-\Gamma u_{N-2}-\Phi v_{N-2}-\Upsilon-\theta_1\}]$，$\psi$は$n^2$次元ベクトル，$\gamma$は$n\times p$次元ベクトル，$\phi$は$n\times n_2$次元ベクトル，$\Upsilon$は$n$次元ベクトルである。$\Sigma_1,\Sigma_{N-1}^{\psi\psi}\cdots$は分散共分散行列である。求ったパラメータは，$x_{N-1},x_{N-2}$の非線形の関数になり，(a)の場合のように$\lambda_N$が線形の式にならず，厳密解を得ることが困難なため，いくつかの近似的解法を検討する必要がある。一つの方法としては，(a)などで求まったx_tの値を用いパラメータの値を決定し，これを用いて求まる新たなx_tを，再びパラメータに代入し繰り返し計算を行なう。この方法をx_tの値が収束するまで繰り返し行なう。

3. 参考文献

1)「土地利用の統計的制御の適用性」奥谷巌，柳沢吉保

2)「Optimization of Stochastic Systems」MASANAO AOKI