交通流モデルを組み込んだ高速道路の動的制御について

信州大学工学部　正員　奥谷 巖
信州大学工学部　学生員 ○濱中 拓郎

1. まえがき

我々は過去に統計的制御理論の応用による都市高速道路の流入制御手法を示してきた。[1] これらの研究においては、制御理論の中で、交通変量の予測式として自己回帰モデルを採用し、また、最適化問題として線形であることが要求されたため、1週間前のデータを用いるなどして、線形近似を行い、疑似的な線形モデルとして取扱ってきた。そのために、求解に際してかなりの量の繰り返し計算が必要とされた。今回は、こうした問題を克服する1つの方法として、制御理論の中に交通流モデルを直接導入し、得られた非線形計画を効率的に解くという方法について考えてみた。

2. 高速道路のモデル及び記号

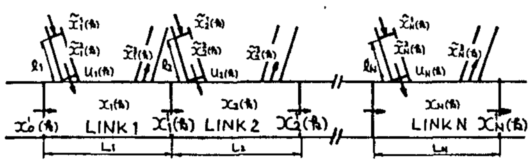

Fig.1　Expressway Model

$\tilde{x}_j^1(k)$: ONランプ交通需要量　$x_0^1(k)$: 最上流流入交通量
$\tilde{x}_j^2(k)$: ONランプ交通密度　$u_j(k)$: 制御量(流入交通量)
$\tilde{x}_j^3(k)$: OFFランプ流出交通量　$x_j(k)$: リンク密度
l_j:ランプ長，L_j:リンク長

3. Distributed - Lag Model

i) リンク密度　$x_j(k+1)$

Greenshieldsの式

$$U_j(k) = U_f\left(1 - \frac{x_j(k)}{\rho_J}\right) \qquad U_f: 自由速度 \quad \rho_J: リンク飽和密度 \tag{1}$$

k時点にjリンクから流出する割合を$S_j(k)$とすると，

$$x_j(k+1)$$
$$= x_j(k) + \frac{\Delta t}{L_j}\left\{(1-S_{j-1}(k))U_f\left(1-\frac{x_{j-1}(k)}{\rho_J}\right)\cdot x_{j-1}(k) - U_f\left(1-\frac{x_j(k)}{\rho_J}\right)x_j(k) + u_j(k)\right\} \tag{2}$$
$$(j=2,3,\cdots,N)$$

$$x_1(k+1)$$
$$= \frac{\Delta t\, U_f}{L_1 \rho_J}x_1(k)^2 + \left(1-\frac{\Delta t\, U_f}{L_1}\right)x_1(k) + \frac{\Delta t}{L_1}u_1(k) + \frac{\Delta t}{L_1}x_0^1(k) \tag{3}$$

ii) ランプ密度　$\tilde{x}_j^2(k+1)$

$$\tilde{x}_j^2(k+1) = \tilde{x}_j^2(k) + \frac{\Delta t}{l_j}\left\{\tilde{x}_j^1(k) - u_j(k)\right\} \tag{4}$$
$$(j=1,2,\cdots,N)$$

iii) 人為的変数　$\hat{x}_j(k+1)$

ランプ密度の制約式

$$0 \leqq \tilde{x}_j^2(k+1) \leqq \rho_{Jr} \quad (j=1,2,\cdots,N) \tag{5}$$

ρ_{Jr}: 流入ランプ飽和密度

と(4)式より，

$$\tilde{x}_j^1(k) - \frac{l_j}{\Delta t}\rho_J \leqq u_j(k) - \frac{l_j}{\Delta t}\tilde{x}_j^2(k) \leqq \tilde{x}_j^1(k) \tag{6}$$

ここで人為的変数$\hat{x}_j(k+1)$を次式で定義する。

$$\hat{x}_j(k+1) = u_j(k) - \frac{l_j}{\Delta t}\tilde{x}_j^2(k) \tag{7}$$
$$(j=1,2,\cdots,N)$$

以上の(2),(3),(4),(7)式がシステム方程式である。

これらをまとめて，

$$x(k+1) = g(x(k),\ u(k),\ k) \tag{8}$$

4. Objective function

目的関数としては，オンランプでの待ち時間を含む高速道路の総所要時間とし，密度で計算する。

$$J(x,u)$$
$$= \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N}\left\{x_j(k)L_j\Delta t + \tilde{x}_j^2(k)l_j\Delta t\right\}$$
$$= \left\{x_j(K)L_j\Delta t + \tilde{x}_j^2(K)l_j\Delta t\right\} + \sum_{k=1}^{K-1}\sum_{j=1}^{N}\left\{x_j(k)L_j\Delta t + \tilde{x}_j^2(k)l_j\Delta t\right\}$$
$$= F(x(K)) + \sum_{k=0}^{K-1} f(x(k),\ u(k),\ k) \xrightarrow[x,u]{} \min \tag{9}$$

5. Constraints

$$0 \leqq x_j(k) \leqq \rho_J, \quad 0 \leqq \tilde{x}_j^2(k) \leqq \rho_{Jr}$$
$$\tilde{x}_j^1(k) - \frac{l_j}{\Delta t}\rho_{Jr} \leqq \hat{x}_j(k+1) \leqq \tilde{x}_j^1(k) \tag{10}$$
$$D_j \leqq u_j(k) \leqq E_j \qquad (j=1,2,\cdots,N,\ k=0,1,\cdots,K-1)$$

6. Lagrangian function

いま、(9), (10)で表わされる最適化問題のラグランジェ双対問題を考える。ラグランジェ乗数を,

$$P(k)^T = [\,P_1(k), P_2(k), \cdots, P_{3N}(k)\,] \quad (11)$$

とすると、ラグランジェ関数は,

$$
\begin{aligned}
&L(x, u, P) \\
&= F(x(K)) + \sum_{k=0}^{K-1} \{ f(x(k), u(k), k) \\
&\quad - P(k)^T \times [x(k+1) - g(x(k), u(k), k)] \} \\
&= F(x(K)) + \sum_{k=0}^{K-1} \{ H(x(k), u(k), P, k) \\
&\quad - P(k-1)^T x(k) \} - P(K-1)^T x(K) \xrightarrow[x,u]{} \min
\end{aligned} \quad (12)
$$

ここに,

$$
\begin{aligned}
&H(x(k), u(k), P, k) \\
&\quad = f(x(k), u(k), k) + P(k)^T g(x(k), u(k), k) \\
&P(-1) = 0
\end{aligned} \quad (13)
$$

従って、(12)式の形から、本最適化問題は、i) $k=0$, ii) $k=1,2,\cdots,K-1$ iii) $k=K$ の3つの場合に分けて考えられる[2]。また、この場合、本最適化問題は、1変数で最大2次の問題となり、ラグランジェ乗数Pのある値$\overset{*}{P}$に対し、制約式(10)の下に簡単に解ける。参考までに、ii) $k=1,2,\cdots,K-1$ の場合について示すと,

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&H(x(k), u(k), \overset{*}{P}, k) - \overset{*}{P}(k-1)^T x(k) \xrightarrow[x,u]{} \min \quad (14) \\
&\text{s.t.} \\
&\quad 0 \leq x_j(k) \leq \rho_J,\ 0 \leq \tilde{x}_j^2(k) \leq \rho_{Jr},\ D_j \leq u_j(k) \leq E_j \\
&\quad \tilde{x}_j^1(k-1) - \frac{\ell_j}{\Delta t}\rho_J \leq \hat{x}_j(k) \leq \tilde{x}_j^1(k-1) \quad (j=1,2,\cdots,N)
\end{aligned}
}
$$

最適解は,

$$
\overset{*}{x}_j(k) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \xi_j(k) \leq 0 \\ \rho_J & \text{if} \quad \rho_J \leq \xi_j(k) \\ \xi_j(k) & \text{if} \quad 0 < \xi_j(k) < \rho_J \quad (j=1,2,\cdots,N-1) \end{cases}
$$

ただし,

$$
\xi_j(k) = -\frac{L_j\Delta t + \overset{*}{P}_j(k)\left(1 - \frac{\Delta t\, v_f}{L_j}\right) - P_j(k-1) + \overset{*}{P}_{j+1}(k)\frac{\Delta t\, v_f(1-S_j(k))}{L_{j+1}}}{2\left\{\overset{*}{P}_j(k)\frac{\Delta t\, v_f}{L_j\rho_J} - \overset{*}{P}_{j+1}(k)\frac{\Delta t\, v_f(1-S_j(k))}{L_{j+1}\rho_J}\right\}} \quad (15)
$$

$(j=1,2,\cdots,N-1)$

$$
\overset{*}{x}_N(k) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \eta(k) \leq 0 \\ \rho_J & \text{if} \quad \rho_J \leq \eta(k) \\ \eta(k) & \text{if} \quad 0 < \eta(k) < \rho_J \end{cases}
$$

ただし,

$$
\eta(k) = -\frac{L_N\Delta t + \overset{*}{P}_N(k)\left(1 - \frac{\Delta t\, v_f}{L_N}\right) - \overset{*}{P}_N(k-1)}{2\overset{*}{P}_N(k)\frac{\Delta t\, v_f}{L_N\rho_J}} \quad (16)
$$

$$
\overset{*}{\tilde{x}}{}_j^2(k) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \phi_j(k) \geq 0 \\ \rho_{Jr} & \text{if} \quad \phi_j(k) < 0 \quad (j=1,2,\cdots,N) \end{cases}
$$

ただし,

$$
\phi_j(k) = \ell_j\Delta t + \overset{*}{P}_{N+j}(k) - \overset{*}{P}_{2N+j}(k)\frac{\ell_j}{\Delta t} - \overset{*}{P}_{N+j}(k-1) \quad (17)
$$

$$
\overset{*}{\hat{x}}_j(k) = \begin{cases} \tilde{x}_j^1(k) - \frac{\ell_j}{\Delta t}\rho_{Jr} & \text{if} \quad \psi_j(k) \geq 0 \\ \tilde{x}_j^1(k) & \text{if} \quad \psi_j(k) < 0 \end{cases}
$$

ただし,

$$
\psi_j(k) = -\overset{*}{P}_{2N+j}(k-1) \quad (j=1,2,\cdots N) \quad (18)
$$

$$
\overset{*}{u}_j(k) = \begin{cases} D_j & \text{if} \quad \theta_j(k) \geq 0 \\ E_j & \text{if} \quad \theta_j(k) < 0 \end{cases} \quad (19)
$$

ただし,

$$
\theta_j(k) = \overset{*}{P}_j(k)\frac{\Delta t}{L_j} - \overset{*}{P}_{N+j}(k)\frac{\Delta t}{L_j} + \overset{*}{P}_{2N+j}(k)
$$

7. Computational Procedures

双対問題を共役傾斜法を用いて解く手順を示す。

$$\phi(P) = \min_{x,u} \{ L(x, u, P) \ ;\ (10)\text{の下に} \} \quad (20)$$

Step. 1 P^i の初期値 P^1 を与える。

$$P^1 = (P^1(0)^T, P^1(1)^T, \cdots, P^1(K-1)^T)^T \quad (21)$$

Step. 2 式(12)を制約式(10)の下に解く。そのときの最適解を

$$
\begin{aligned}
x^i &= (x^i(1)^T, x^i(2)^T, \cdots, x^i(K)^T)^T \\
u^i &= (u^i(0)^T, u^i(1)^T, \cdots, u^i(K-1)^T)^T
\end{aligned} \quad (22)
$$

とする。($k=1,2,\cdots,K-1$ については、式(15)~(19)に示した。)

誤差ベクトル $e(P^i)$ を,

$$
e(P^i) \triangleq \nabla\phi(P)\big|_{P=P^i} = \begin{bmatrix} \nabla_{P(0)}\phi(P)\big|_{P=P^i} \\ \nabla_{P(1)}\phi(P)\big|_{P=P^i} \\ \vdots \\ \nabla_{P(K-1)}\phi(P)\big|_{P=P^i} \end{bmatrix} \quad (23)
$$

ここで、$\|e(P^i)\|^2 < \varepsilon_1$ かつ $\|J(x^i, u^i) - \phi(P^i)\|^2 < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$は正小値) であれば、始問題の最適解が求まった。$\|e(P^i)\|^2 \geq \varepsilon_1$ であれば Step. 3へ

Step. 3

$$P^{i+1} = P^i + \alpha_i d^i \quad (24)$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&d^i = e(P^i) + \beta_{i-1} d^{i-1}, \quad d^1 = e(P^1) \\
&\beta_{i-1} = \frac{e(P^i)^T e(P^i)}{e(P^{i-1})^T e(P^{i-1})}
\end{aligned} \quad (25)
$$

$i+1 \to i$ として Step. 2へ

〈参考文献〉 1) 奥谷, 浜中 / 統計的制御理論の応用による都市高速道路の流入制御〈第28回自動制御連合講演会 '85〉
2) H. TAMURA / Decentralized Optimization for Distributed-Lag Models of Discrete Systems ('75)