IV—15

縮小写像法による確率利用者均衡の計算法

岐阜大学工学部 ○正員 宮城俊彦

1. はじめに

Fiskによって提案された確率利用者均衡モデル(Stochastic User Equilibrium : SUE)は，Wardrop均衡配分と完全なランダム配分を包含する一般的な配分モデルであるが，現時点ではPowellとSheffiによる逐次平均化法(Method of Successive Average : MSA)しか計算法がない.

本研究の目的は，SUEモデルの解法として縮小写像原理に基づく方法を提案し，その収束性を検討することにある.

2. SUEモデルとその解の特性

SUEモデルは以下の数理計画問題として定式化できる.

目的関数：$Z(f)$ →最小化

$$Z(f) = \frac{1}{\theta}\sum_i\sum_j\sum_r f_{ijr}\ln f_{ijr} + \sum_a \int_0^{x_a} C_a(x)\,dx \qquad (1)$$

制約条件：

$$\sum_{r\in R_{ij}} f_{ijr} = g_{ij}, \quad f_{ijr}\ge 0 \qquad (2)$$

g_{ij}：ODペアij間の交通量

f_{ijr}：ODペアijのr番目経路交通量

x_a：リンクaの交通量

$C_a(\cdot)$：リンクaのパフォーマンス関数

R_{ij}：ODペアij間の経路集合

θ：分散パラメータ

この問題の最適解$\hat{f}$は次式で与えられる.

$$f_{ijr} = \frac{g_{ij}\exp\{-\theta C_{ijr}(f)\}}{\sum_{r\in R_{ij}}\exp\{-\theta C_{ijr}(f)\}} \qquad (3)$$

実現可能交通量の集合Fを

$$F = \{f\ge 0 \mid \sum_r f_{ijr} = g_{ij} \quad \text{for all OD pairs}\}$$

と定義するならば，式(3)はF上の点fをロジット変換によってそれ自身の上に写像する関係を与えている．したがって，ロジット変換Dが連続ならば，Brouwerの不動点定理によってDは不動点f^*をもち，f^*は均衡解に他ならない.

式(3)は経路行列$\delta=\{\delta^{ij}_{a,r}\}$を用いて次のように変換できる.

$$x_a = \sum_i\sum_j\sum_r \delta^{ij}_{a,r}\frac{g_{ij}\exp\{-\theta\sum_a\delta^{ij}_{a,r}C_a(x_a)\}}{\sum_r\exp\{-\theta\sum_a\delta^{ij}_{a,r}C_a(x_a)\}} \qquad (4)$$

このような変換を施したとしても不動点$\hat{x}$が存在することには変りない．このようにSUEモデルは不動点問題を解くことによって均衡解が得られる．式(3)を用いるならば，そのとき経路集合R_{ij}の要素が識別できることが前提となるが，一般にはR_{ij}の識別は不可能である．無論，同じことが式(4)のリンクフローベースについて言えるが，この場合はDial法を用いることによって経路列挙を行なうことなしに，リンクフローを求めることができる．Dial法は，リンク尤度という概念を用いて有効経路集合E_{ij} ($\subseteq R_{ij}$)を決定し，E_{ij}に含まれるリンクにフローを負荷する方法であり，経路交通量そのものは直接には与えない。

3. 縮小写像近似法の提案

Fを変換して得られる集合X上の任意の点xをDial変換によってX上に写像するときの均衡解の計算法の概略を示す．まず，不動点アルゴリズムを構築する場合に重要となる縮小写像定理を示す.

【縮小写像定理】 Tが凸集合X上への縮小写像ならば，$\hat{x} = T(\hat{x})$を満足する唯一のベクトルが存在する．さらに，$\hat{x}$は任意の初期ベクトル$x_0\in X$から出発する逐次近似法によって得ることができる.

縮小写像とは次の関係を満足する変換のことである。すなわち，$y, x \in X$ に対し，

$$\| T(y) - T(x) \| \leq k \| y - x \|$$

を満足する k, $0 \leq k < 1$ が存在するとき，T を縮小写像という。

さて，初期実現可能リンクフロー x_0 が与えられているものとする。このとき，x_0 の変換は $C(x_0)$ を与えたときの Dial法によって行われ，そのとき得られる新しいリンクフローを y とおく。また，y の変換を $T(y)$ とおくとき，もし，

$$\| T(y) - y \| \leq k \| y - x_0 \|, \quad 0 \leq k < 1 \qquad (5)$$

が成立しているならば，このときの変換は縮小写像であり，新しい解 x_1 を $x_1 = y$ として求める。もし，式(5)が成立してないならば，すなわち，x_1 の候補 y に対し，式(5) が成立しないときには，

$$\beta \| T(y) - T(x_0) \| \leq k \| x_1 - x_0 \| \qquad (6)$$

となるような β を求め，

$$x_1 = (1-\beta) x_0 + \beta y \qquad (7)$$

として新しい解 x_1 を再計算する。この操作によって再度式(5)を成立せしめることができる。このような操作を各反復時点で実行するならば，近似的に縮小写像が構成できる。すなわち，このような操作は，前の解 x_{n-1} とその変換 $T(x_{n-1})$ に対して縮小写像となるが，x_{n-1} と x_n の間でそれが成立するかどうかは，線形費用関数以外の場合は保証できない。したがって，近似手法であるが，次節にみるようにこの方法はある条件下で収束する。

4. アルゴリズムの収束性

今，初期解 x_0，x_0 の変換 x_1 および x_1 の変換 $T(x_1) = y_1$ に対し，次の関係が成立するものと仮定する。

$$\| y_1 - T(x_0) \| > k \| x_1 - x_0 \| \qquad (8)$$

このとき，

$$\beta \| y_1 - T(x_0) \| \leq k \| x_1 - x_0 \| \qquad (9)$$

を成立せしめる β によって，

$$x_1 = (1-\beta) x_0 + \beta y_0 \qquad (10)$$

として新しい点を求める。ただし，$y_0 = T(x_0)$。このとき，

$$\| y_1 - T(x_0) \| \leq k \| y_0 - x_0 \| \qquad (11)$$

が成立する。議論を簡単にするため，一般性を失うことなく続くステップでも式(8)と同様の逆向き不等式が成立するものと仮定する。このとき，第2ステップでは次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} \| y_2 - T(x_1) \| &\leq k \| y_1 - x_1 \| \\ &\leq k \| y_1 - y_0 + (1-\beta)(y_0 - x_0) \| \\ &\leq k \| y_1 - y_0 \| + k(1-\beta) \| y_0 - x_0 \| \\ &= k(1+k-\beta) \| y_0 - x_0 \| \end{aligned}$$

同様の不等式関係が以降のステップでも成立し，結局，n回目反復時点では，

$$\begin{aligned} \| y_n - T(x_{n-1}) \| &\leq k \| y_{n-1} - x_{n-1} \| \\ &\leq k (1+k-\beta)^{n-1} \| y_0 - x_0 \| \qquad (12) \end{aligned}$$

が成立する。ただし，$x_n = (1-\beta) x_{n-1} + \beta T(x_{n-1})$。したがって，$n \to \infty$ とすることによって，

$$\| y_n - T(x_{n-1}) \| \to 0$$

$$\| x_{n-1} - x_n \| \to 0$$

$$\| y_{n-1} - x_{n-1} \| \to 0$$

が成立し，これより，$T(x_{n-1}) = y_{n-1}$，$T(x_n) = x_n$ として不動点が得られる。ただし，このアルゴリズムが上述のように収束するためには，$k < \beta$ となるような k を与えることができることが前提である。これまでの数値計算例によれば，有効経路集合を固定した場合には MSA より早い収束性を示す場合が多い。また，有効経路集合を各反復時点で固定しない場合には MSA と同様の挙動を示した。

参考文献

Fisk (1980) Some Development in Equilibrium Traffic Assignment. Transpn. Res., 14B (3), pp. 243-255.

Powell and Sheffi (1982) The Convergence of Equilibrium Algorithms with Predetermined Step Sizes. Transpn. Sci., 16 (1), pp. 45-55.