砂の構造表現モデルの考察

岐阜大学工学部　正会員　宇野尚雄
岐阜大学工学部　学生会員　○佐橋祐輔

1. 均等径の2次元粒体モデル

均等な砂の構造を表現するモデルとして提案された2次元モデル[1]について考察した結果を述べる。そのモデルの概要を述べると次のようである。①2次元的に積層された均等径の粒子の中心を直線で結ぶと、図-1に示すトラス構造ができる。②それは等しい辺長をもつ、i角形（i=3,4,‥‥）の組合わせとみることができる。③i角形要素が現われる確率をP_iとすると、i～P_iの関係は間隙比eをパラメターとして表現される（後述の図-2参照）。P_iの分布は砂の構造を表現する一指標とみなせる。④i角形要素の面積は正i角形のとき最大となり、このときの間隙比を$e_{i,max}$と表わす。同様にその最小面積は3角形を（i-2）ヶ合わせたものに相当し、そのときの間隙比を$e_{i,min}$と表わすと、次式で与えられる。

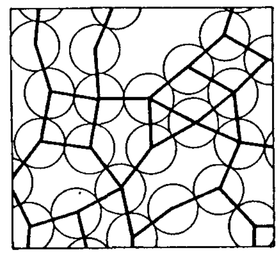


図-1 2次元粒状体モデル

$$e_{i,max}=\frac{A_{i,max}}{A_{si}}-1 \quad (1), \qquad e_{i,min}=(i-2)\,\overline{e}_3 \quad (2)$$

$$A_{i,max}=\frac{iD^2}{4}\cdot\tan\left[\left(\frac{i-2}{2i}\right)\pi\right]\ (i\geq 4) \quad (3), \qquad A_{si}=\pi D^2(i-2)/8 \quad (4)$$

ここに　$\overline{e}_3=2\sqrt{3}/\pi-1=0.10266$,　D：均等な粒径

i角形要素の間隙比e_iは式(1),(2)の大きさの中間に分布すると考えられる。平均間隙比$\overline{e}_i$を用いて、全体の間隙比eとの関係を示すと、

$$e=\Sigma P_i\overline{e}_i \qquad (5)$$

⑤ 均等粒子の集合体について、

$$S=-\Sigma P_i\ \ln P_i \qquad (6)$$

で定義されるエントロピーSを最大にする条件式を求めると

$$P_i=\frac{\exp(\beta E_i)}{\Sigma\exp(\beta E_i)} \quad (7), \qquad E_i=\frac{(i-2)(e-\overline{e}_i)}{1+e} \quad (8), \qquad \Sigma P_iE_i=0 \quad (9)$$

ここに　βは定数で、式(7)～(9)の誘導の際に導入したラグランジェの未定係数であり、結果的に、

$$\beta=(1/E_3)\,\Sigma P_i\ \ln(P_3/P_i) \qquad (10)$$

で与えられる。

2. 考察

上述した2次元モデルが提案された論文[1]では、i～P_i～eの計算例が2種類示されているが、結果的に、式(7)～(9)を満足させるP_i分布を求めると、式(5)の右辺が左辺の3割近く小さい値となること、乱数を使った$\overline{e}_i$を採用すると満足なP_i分布が一義的に定まらないで、複数個の答が得られること、等が報告されている。このため、これらの理論的不整合性を調べるため、再検討した結果を報告する。

計算機では㋑βを仮定し（eの大きさに応じて変えて），㋺式(7)でP_iを計算する，㋩そのP_iを用いて式(10)によりβを計算し（仮定値と一致しないので），㊁計算されたβを用いてP_iの再計

算を繰返し、βが一定値に収束したときのP_i分布を求める、という順序で計算した。繰返し計算は数回で収束するが、式(5)は満足せず、やはり3割近いズレが消えなかった。

これらの検討から、

(1) $\overline{e_i}$の値は$e_{i,max}$と$e_{i,min}$との中点ではなく、3割近く大きく$e_{i,max}$寄りである可能性がある。

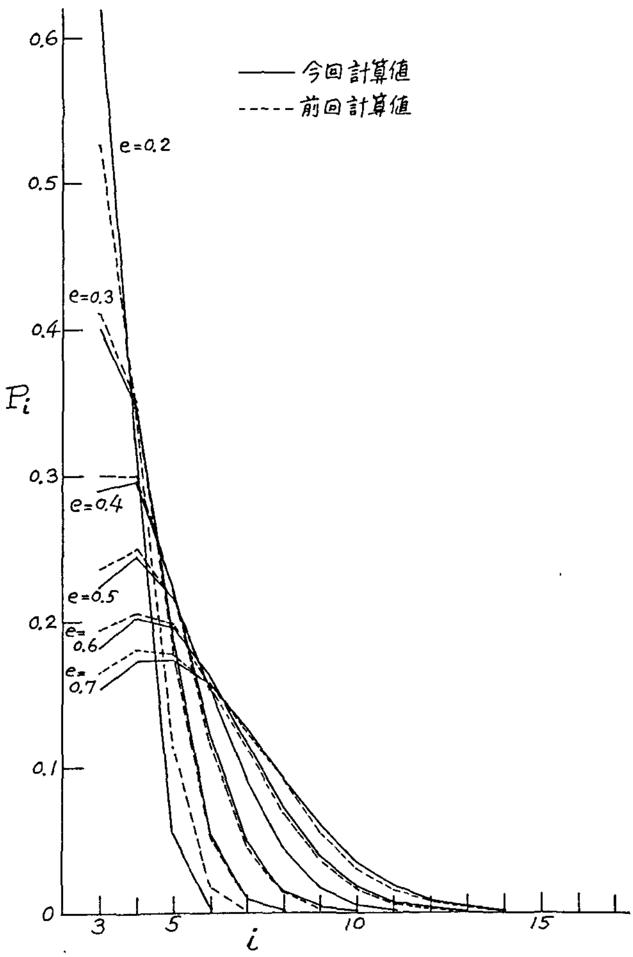
(2) エントロピー最大ということはβを最大にするようにP_i分布を決定することに対応している。

という2点が判明した。

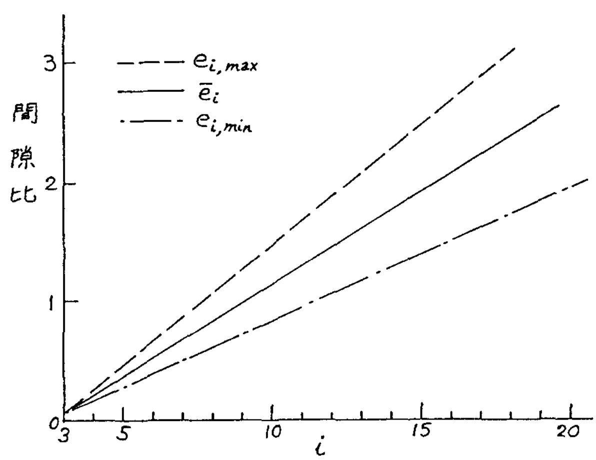
e_iの平均値であるべき$\overline{e_i}$は(1)に従って$e_{i,max}$と$e_{i,min}$の中点より大きいということがあり得るとすれば、i角形の形状が正i角形寄りのものになり易い性質がなければならない。実験の観察によると、$\overline{e_i}$はかなり大きいことが報告されているので、その可能性はありそうである。今後、そのあるべき$\overline{e_i}$を模索するため、再計算するとともにその根拠を究明したいと考えている。

参考文献

1) T. Uno and M. Fukuda: A method to Express the Structure of Uniform Sand, Proc. of 7th Asian Regional Conf. on SMFE., Vol.1, pp. 371～376, 1983



図－2　i角形要素の確率P_iの分布



図－3　間隙比$e_{i,max}$，$\overline{e_i}$，$e_{i,min}$の関係