

主応力方向の回転の影響も考慮できる一般面上の土の応力・ひずみ関係式

名古屋工業大学 正員 松岡 元、 学生員 岩田 靖
学生員 ○榎原和成、 学生員 鈴木康之

どんな材料でも、ある任意面上の応力が変化すればひずみが発生すると考えるのが自然である。弾性論の定式でもそうになっているが、塑性論では応力の不変量(主応力値から規定される応力パラメーター)によって定式化されているものが多いので、例えば主応力値を固定して主応力方向のみを回転させる「主応力方向回転試験」によって発生するひずみを説明することができない。ここでは一般面(任意面)上のひずみ増分($d\epsilon_x, d\epsilon_y, d\epsilon_{xy}$)を一般面上の応力増分($d\sigma_x, d\sigma_y, d\tau_{xy}$)と直接結び付ける土の構成式を新たに提案する。

1. 一般面上のせん断・垂直応力比～せん断ひずみ関係

まず、一般面上のせん断・垂直応力比とせん断ひずみの間に次の双曲線型の関係を仮定する(図-1, 2参照)。

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_0} \cdot \frac{(\tau_{xy}/\sigma_x) f \cdot (\tau_{xy}/\sigma_y)}{(\tau_{xy}/\sigma_x) f - (\tau_{xy}/\sigma_y)} \quad \text{or} \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_0} \cdot \frac{(\tau_{xy}/\sigma_y) f \cdot (\tau_{xy}/\sigma_x)}{(\tau_{xy}/\sigma_y) f - (\tau_{xy}/\sigma_x)} \quad (1)$$

ここで、せん断・垂直応力比で規定したのは、土が基本的には摩擦法則に従う材料であるとの考えからであり、サフィクス f は破壊時の値を意味する。なお、図-2から次の関係式が容易に得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tau_{xy}/\sigma_x) \\ (\tau_{xy}/\sigma_y) \end{array} \right\} = \frac{\sin\phi_{mo} \cdot \sin 2\alpha}{1 \pm \sin\phi_{mo} \cdot \cos 2\alpha} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\tau_{xy}/\sigma_x) f \\ (\tau_{xy}/\sigma_y) f \end{array} \right\} = \frac{\sin\phi \cdot \sin 2\alpha}{1 \pm \sin\phi \cdot \cos 2\alpha} \quad (2) \quad (3)$$

式(2), (3)を式(1)に代入すれば、式(1)の両式は共に次式となる。

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_0} \cdot \frac{\sin\phi \cdot \sin\phi_{mo} \cdot \sin 2\alpha}{\sin\phi - \sin\phi_{mo}} \quad (4)$$

式(4)で注目すべきは、 $\sin 2\alpha$ が掛っていることであり、モールのひずみ円で考えれば、 γ_{xy} がひずみテンソルとしての性質を満足しているのが理解される。また、式(4)中の $1/G_0$ は図-1より拘束圧 σ_m が大きくなれば大きくなる性質がある($1/G_0 \propto \ln(\sigma_m/\sigma_{mi})$)(5)、 σ_{mi} :拘束圧の基準値)ので、式(4)は $\phi_{mo}, \alpha, \sigma_m$ の関数であることがわかる。そこで、 $\phi_{mo}, \alpha, \sigma_m$ に関して式(4)の全微分をとれば次式を得る。

$$d\gamma_{xy} = \frac{1}{G_0} \cdot \frac{\sin^2\phi \cdot \cos\phi_{mo} \cdot \sin 2\alpha}{(\sin\phi - \sin\phi_{mo})^2} \cdot d\phi_{mo} + \frac{2}{G_0} \cdot \frac{\sin\phi \cdot \sin\phi_{mo} \cdot \cos 2\alpha}{\sin\phi - \sin\phi_{mo}} \cdot d\alpha + \frac{\sin\phi \cdot \sin\phi_{mo} \cdot \sin 2\alpha}{\sin\phi - \sin\phi_{mo}} \cdot \frac{\partial(1/G_0)}{\partial\sigma_m} \cdot d\sigma_m \quad (6)$$

式(6)の右辺第2項は主応力方向の回転によって生じる $d\gamma_{xy}$ を表わしているが、その項には $\cos 2\alpha$ が掛っている。一方、せん断応力 τ_{xy} は図-2からわかるように回転に伴って $\sin 2\alpha$ の関数によって変化するので、両者の間には図-3中の白丸で示すように 90° のズレが存在する。実際には、主応力方向回転時には σ_1 と $d\epsilon_1$ の方向には δ ($\approx 30^\circ$)のズレが生じるので、図-3(b)に示すように $(90^\circ - 2\delta)$ だけ角度を戻さなければならない。すなわち、 $\cos 2\alpha$ は $\cos(2\alpha - (90^\circ - 2\delta)) = \sin 2(\alpha + \delta)$ となる。 $1/G_0 = k_s$ と置き、式(6)の右辺第3項の係数を k_c と置き換えれば(式(5)参照)次式を得る。

$$d\gamma_{xy}^s = k_s \cdot \frac{\sin^2\phi \cdot \cos\phi_{mo} \cdot \sin 2\alpha}{(\sin\phi - \sin\phi_{mo})^2} \cdot d\phi_{mo} \quad (\text{せん断}) \quad (7)$$

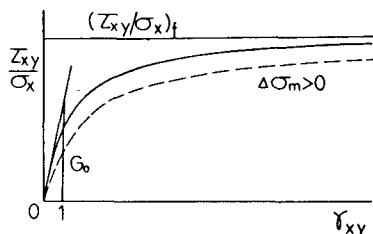


図-1 一般面上のせん断・垂直応力比とせん断ひずみ間の双曲線関係

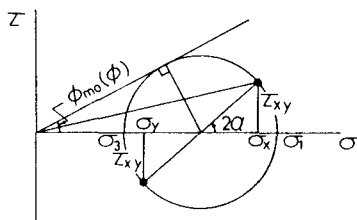


図-2 モールの応力円で示した一般面(主応力面と角度 α をなす面)上のせん断応力と垂直応力

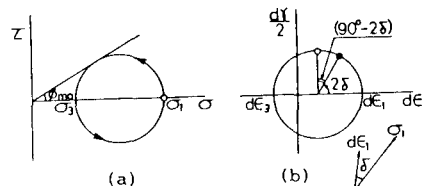


図-3 主応力方向回転時の応力状態とひずみ増分状態の対応関係

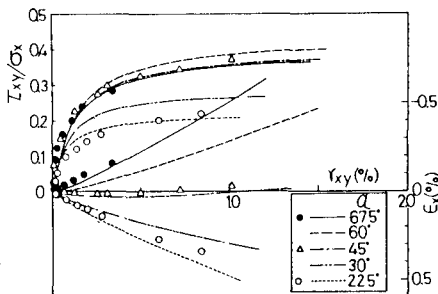


図-4 アルミ丸粉混合体の一般面(主応力面と角度 α をなす面)上のせん断試験結果と解析値

$$d\gamma_{xy}^r = 2k_s \cdot \frac{\sin\phi \cdot \sin\phi_{mo} \cdot \sin 2(\alpha + \delta)}{\sin\phi - \sin\phi_{mo}} \cdot d\alpha \quad (\text{主応力方向の回転}) \quad (8)$$

$$d\gamma_{xy}^c = k_c \cdot \frac{\sin\phi \cdot \sin\phi_{mo} \cdot \sin 2\alpha}{\sin\phi - \sin\phi_{mo}} \cdot \frac{d\sigma_m}{\sigma_m} \quad (\text{圧密}) \quad (9)$$

2. 一般面上の応力比・ひずみ増分比関係

Rove(1962)のストレス・ダイレタンスー関係 $R = \sigma_1 / \sigma_3 = K \cdot (-d\epsilon_3 / d\epsilon_1)$, $K = \tan^2(45 + \frac{\phi}{2})$ (10) を一般面上に変換すれば次式を得る。

$$\frac{d\epsilon_x / d\gamma_{xy}}{d\epsilon_y / d\gamma_{xy}} = \frac{(K - R) / (K + R) \pm \cos 2\alpha}{2 \cdot \sin 2\alpha} \quad (11)$$

同様に、松岡(1974)の滑動面上の応力比・ひずみ増分比関係 $\tau / \sigma_N = \lambda (-d\epsilon_N / d\gamma)$ + μ (12) を一般面上に変換すれば次式を得る。

$$\frac{d\epsilon_x / d\gamma_{xy}}{d\epsilon_y / d\gamma_{xy}} = \frac{2 \cdot \frac{\mu - \tan\phi_{mo}}{\lambda} \cdot \cos\phi_{mo} + \sin\phi_{mo} \pm \cos 2\alpha}{2 \cdot \sin 2\alpha} \quad (13)$$

ここで、式(8)を用いて主応力方向の回転によるひずみを算定する時には、式(11)、(13)中の 2α が $2(\alpha + \delta)$ となることに注意しなければならない。さて、 $d\phi_{mo} \cdot d\alpha$, $d\sigma_m$ は一般応力増分 ($d\sigma_x, d\sigma_y, d\tau_{xy}$) で式示されるので(式省略)、式(7)、(8)、(9)と式(11)(又は式(13))を合わせれば、一般面上のひずみ増分 ($d\epsilon_x, d\epsilon_y, d\gamma_{xy}$) を一般面上の応力増分 ($d\sigma_x, d\sigma_y, d\tau_{xy}$) によって直接表現できることになる。さらに、上記のひずみ増分には、次式の等方圧密によるひずみ増分を加えなければならない。

$$d\epsilon_v^c = \frac{0.434C_c}{1 + e_0} \cdot \frac{d\sigma_m}{\sigma_m} \quad \text{or} \quad d\epsilon_v^c = \frac{0.434C_s}{1 + e_0} \cdot \frac{d\sigma_m}{\sigma_m} \quad (14)$$

3. 任意面上のせん断試験、主応力方向回転試験および単純せん断試験結果による検証

図-4は、2次元粒状体モデル ($\phi 1.6, 3\text{mm}$, 長さ50mmのアルミ丸棒混合体) を試料とした一般応力試験機による、主応力面と角度 α をなす面(実験は $\alpha = 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ$ で行なった)上でのせん断試験結果(プロット)と解析値の比較を示したものである。同じ試料のせん断試験でも、着目する面によってこれだけ応力・ひずみ関係が異なるのは興味深い。図-5(a), (b)は、同じ試料に対する主応力値を固定してモールの応力円に沿って1周回した、主応力方向回転試験結果と解析値の比較を示している。特に、体積ひずみ ϵ_v が α に対して直線的に圧縮するのは、主応力方向の回転による液状化現象と関連しており注目に値する。また、図-6(a), (b)は、同じ試料に対する単純せん断試験結果と解析値の比較を示している。単純せん断試験の場合には、側方ひずみ増分 $d\epsilon_y = d\epsilon_y^s$ (せん断) + $d\epsilon_y^r$ (主応力方向の回転) + $d\epsilon_y^c$ (圧密) = 0 となるが、(a)図中の破線は、主応力方向の回転の影響を考慮しない場合の解析値を意味している。(b)図は、単純せん断面上のせん断・垂直応力比と主応力方向の傾斜角 α の関係を小田・小西の式 ($\tau_{xy} / \sigma_x = x \cdot \tan \alpha$) に合せて整理したものである。結果的に小田・小西の式も解析値より説明されることは興味深い。アルミ丸棒混合体の場合は $x \approx 0.38$ となる。図-7(a), (b)は、豊浦砂の単純せん断試験結果と解析値の比較を示している。豊浦砂の場合は、 $x \approx 0.57$ となる。以上の解析に用いたパラメータは、アルミ丸棒混合体に対して $k_s = 0.31\%$, $\lambda = 0.8$, $\mu = 0.19$, $\phi = 24^\circ$, $C_c / (1 + e_0) = 1.2\%$, $\delta = 30^\circ$ 、豊浦砂に対して $k_s = 0.23\%$, $\lambda = 1.2$, $\mu = 0.20$, $\phi = 40^\circ$, $C_c / (1 + e_0) = 0.928\%$, $\delta = 30^\circ$ である。

なお、上記の議論は2次元に限っているが、2次元的な主ひずみ増分の重ね合わせを仮定する「複合滑動面の概念」³⁾を適用することによって、3次元へ拡張することができる。

謝辞 日頃御援助いただいている本学山内利彦教授、議論に参加し有益な助言をいただいた中井照夫助教授に謝意を表します。

文献

- 1) 松岡・竹田・岩田・榊原(1985): 第20回土質工学研究発表会, 115, pp.277-278.
- 2) Oda, M. & Konishi, J. (1974): Soils & Foundations Vol.14, No.4, pp.39-53.
- 3) 松岡・中井(1985): 土と基礎, Vol.33, No.4, pp.15-23.

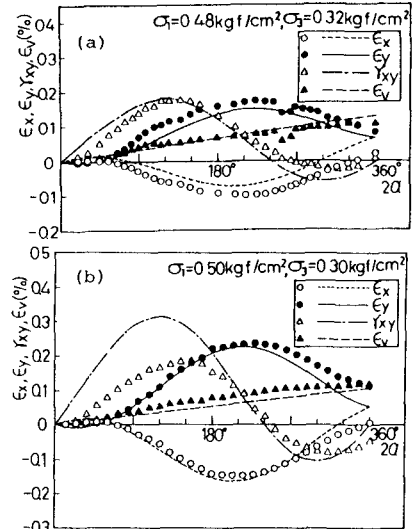


図-5 アルミ丸棒混合体の主応力方向回転試験結果と解析値

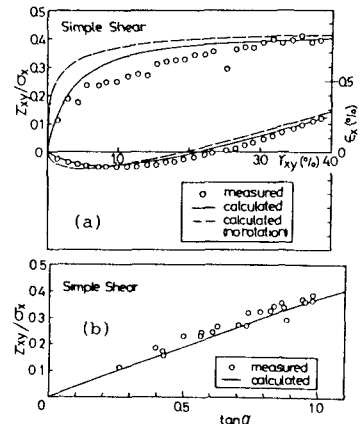


図-6 アルミ丸棒混合体の単純せん断試験結果と解析値

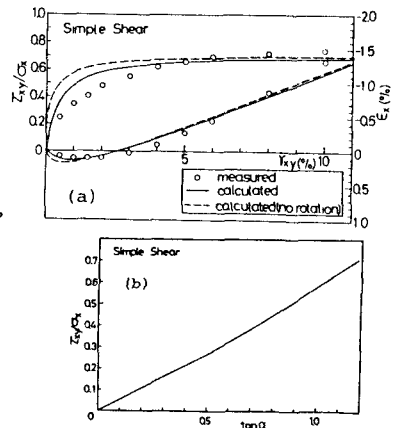


図-7 豊浦砂の単純せん断試験結果と解析値