

浮遊砂の拡散係数の再検討

金沢大学工学部 正 員 辻本 哲郎

金沢大学工学部 学生員 ○ 山元 達郎

1. まえがき

土砂輸送のうち浮遊砂は乱れによって水流中に拡散して運ばれるもので、通常拡散理論を用い、浮遊砂の拡散係数に水の運動量拡散係数(渦動粘性係数)を代用している。しかし、とくに掃流砂と浮遊砂が混在するような条件では、砂粒子の運動は必ずしも水粒子の運動と同一視できない。本研究では浮遊砂の拡散係数と渦動粘性係数の相違に焦点をあて以下の2点について考察・検討を行う。

2. 確率過程モデルによる浮遊砂の拡散係数に関する検討

砂粒子の微小時間 Δt 内の位置の変化 $\{z\}$ を確率変数とし、その確率密度関数を $f_z\{z\}$ とする。簡単のため粒子の運動領域を $(-\infty, \infty)$ とし、粒子の出発点も限定しないときには、粒子運動が開始されても時間後の粒子の存在高さの確率密度 $f_z(y; t)$ は次式となる。

$$f_z(y; t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_z(y-z; t) f_z(z) dz \quad \text{--- ①}$$

$$f_z(y; t+\Delta t) = f_z(y; t) - E\{z\} \frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{1}{2} E\{z^2\} \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} \quad \text{--- ②}$$

$$(E\{z^2\}/2) \cdot \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} = E\{z^2\} f_z \quad \text{--- ③}$$

ここで、 $\rho_s = \sqrt{w_0^2/u_*^2}$ 、 v :鉛直方向の乱れ速度、 k_0 :粒子の鉛直方向変動速度と v との比である。粒子の存在高さの確率密度 f_z は、濃度分布 C_s と相似であると考えられるから、③式とRouseによる拡散理論の式である $E_s(\frac{\partial^2 C_s}{\partial y^2}) = -w_0 \cdot C_s$ を比較して、浮遊砂の拡散係数 E_s を評価すると

$$E_s = \frac{E\{z^2\}}{2 \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2}} = \frac{\Delta t}{2} u_*^2 \{k_0^2 \rho_s^2 + (\frac{w_0}{u_*})^2\} \quad \text{--- ④}$$

$E_{s*} = \frac{E_s}{u_* h} = \frac{1}{2} \{k_0^2 (\sqrt{w_0^2/u_*^2})^2 + (\frac{w_0}{u_*})^2\} \frac{u_* \Delta t}{h}$ となる。 $(\frac{w_0}{u_*}) \rightarrow 0$ では、浮遊砂が水流の乱れに充分追従するだろうから、砂の拡散係数 E_s と水の運動量拡散係数 E_M が同一視できると考えられ、このとき

$$E_{M*} = \frac{E_M}{u_* h} = \frac{1}{2} k_0^2 (\sqrt{w_0^2/u_*^2})^2 \frac{u_* \Delta t}{h} \quad \text{となる。すなわち、} \beta \equiv \frac{E_s}{E_M} = \frac{E_{s*}}{E_{M*}} = 1 + (1/k_0^2 \rho_s^2) (w_0/u_*)^2 \quad \text{--- ⑤}$$

を得る。Kerssensら¹⁾がColemanのEnnoree¹¹⁾の資料より回帰解析した結果は、 $\beta = 1 + \alpha_1 (w_0/u_*)^{\alpha_2}$ において $\alpha_1 = 1.54, \alpha_2 = 2.12$ となっている。⑤式において $k_0 = 1.0, \rho_s = 0.8$ とすると、 $\alpha_1 = 1.56, \alpha_2 = 2$ であり、Kerssensらの結果と酷似している。また、van Rijn³⁾も、Colemanのデータ²¹⁾から、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 2.0$ とした式の提案をしている。図1は、Colemanのデータの E_{s*} の値と渦動粘性係数の値 $E_{M*} = K\eta(1-\eta)$ との比を3種類の方法で求めそれを β の実測値とし、⑤式に $k_0 = 1.0, \rho_s = 0.8$ を代入した曲線と比較したもので (w_0/u_*) による E_s の E_M からの系統的ずれをうまく説明している。図2は、実測した濃度分布をRouse式¹⁾に適合させたときのべき指数 Z_1 の (w_0/u_*) に対する変化が、本研究の考え方でもよく説明できることを示している。Rouse式によると C_a を基準面濃度、 a を基準面高さとして、 $C/C_a = [(h-y)/y] \{a/(h-a)\}^{Z_1}$ で $E_s = \beta E_M$ とすると $Z_1 = w_0/\beta u_* h$ であり、図2の理論曲線は β に⑤式を代入したものである。

3. 掃流から浮遊への遷移を考慮した“みかけの浮遊砂の拡散係数”

通常用いられる浮遊砂の拡散方程式は、 $C w_0 + E_s \frac{\partial C}{\partial y} = 0$ であるが、河床付近では掃流砂が浮遊砂に遷移することによる“生成項”が無視できない。単位時間単位面積当り掃流砂から浮遊砂に遷移する

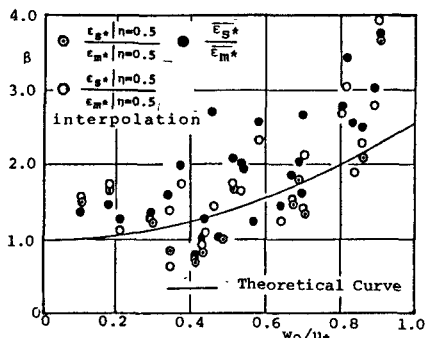


図1. 浮遊砂の拡散係数に及ぶ (w_0/u_*) の効果

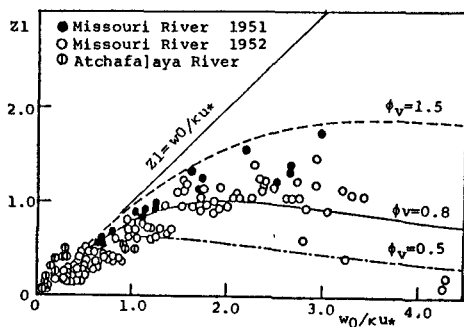


図2. ベキ指数 $Z1$ の (w_0/u_*) による変化

ことにより生成される浮遊砂の体積(Murphy⁵⁾はこれをsource strength と呼んでいる)を S とすると、浮遊砂濃度を支配する方程式は、 $-\frac{\partial}{\partial y}(Cw_0 + E_s \frac{\partial C}{\partial y}) = S$ — ⑥ となる。河床での境界条件は、平衡状態では河床において掃流砂に逆戻りするとして、 $C(0)w_0 + E_s \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_0 = \int_0^h S(y) dy$ — ⑦ である。⑥を解くにあたり、簡単のために E_s は y によって変化しないとした。 $\eta \equiv y/h$, $C_* \equiv C/C_1$, $\sigma_* \equiv (Sh/u_*)/C_1$ と無次元化すると、 $C_*(\eta) = \exp\{-\frac{1}{E_{s*}}(\frac{w_0}{u_*})\eta\} + (\frac{w_0}{u_*}) \int_0^\eta \sigma_*(\eta) d\eta + (\frac{w_0}{u_*}) \exp\{-\frac{1}{E_{s*}}(\frac{w_0}{u_*})\eta\} \int_0^\eta \sigma_*(\eta) \exp\{\frac{1}{E_{s*}}(\frac{w_0}{u_*})\eta\} d\eta$ — ⑧ を得る。ここで実用上の便宜から、通常の(同次の)拡散方程式を代用する際のみかけの拡散係数 E_s' を考える。これは、 $E_s' = -(w_0/u_*)C_*/(dC_*/d\eta)$ で与えられるから、上述の結果を代入すると

$$\beta' \equiv \frac{E_s'}{E_{s*}} = \frac{1 + (u_* / w_0) \{ \exp(\varphi\eta) \int_0^\eta \sigma_*(\eta) d\eta + \int_0^\eta \sigma_*(\eta) \exp(\varphi\eta) d\eta \}}{1 + (u_* / w_0) \int_0^\eta \sigma_* \exp(\varphi\eta) d\eta} \quad \text{--- ⑨} \quad \varphi \equiv \frac{1}{E_{s*}} \left(\frac{w_0}{u_*} \right)$$

を得る。 β' は浮遊砂の拡散係数の水の運動量拡散係数からのずれの一部を担っていると考えられる。簡単のため $\sigma_*(\eta)$ に対して、線型分布と指数分布を考える。すなわち、

$$\sigma_*(\eta) = \begin{cases} \sigma_{*0}(1 - \eta/\eta_B) & (\eta \leq \eta_B) \\ 0 & (\eta_B \leq \eta \leq 1) \end{cases} ; \quad \sigma_*(\eta) = \sigma_{*0} \exp(-\eta/\Lambda_B) \quad \begin{aligned} \Lambda_B &= r \Lambda_S \\ \Lambda_S &= E_{s*}(\frac{w_0}{u_*}) = 1/\varphi \end{aligned}$$

である。2つの分布の全供給強度と分布の重心の位置を等しくさせて両分布による β' の相違を調べた。実質的には全供給強度と重心を与えれば、 σ_* の分布形そのものは β' の評価に影響を与えない。すなわち、これら2つの量の評価を適切に行うことが重要である。

4. あとがき

確率過程モデルによる議論に関しては乱れ強度 η が η の関数であること、又、供給源の分布に関しては掃流運動から浮遊への遷移機構を考慮して、浮遊砂の拡散係数のより合理的かつ適切な評価につとめたい。

参考文献

- 1) Kerssens et al. Proc. ASCE, Vol. 105, HY 5, 1979.
- 2) Coleman, N.L. Water Resources Research, Vol. 6, No. 3, 1970.
- 3) van Rijn, L.C. Proc. ASCE, Vol. 110, No. 11, 1984.
- 4) Rouse, H. Trans. ASCE, vol. 102, 1937.
- 5) Murphy, P.J. Proc. ASCE, Vol. 111, No. 1, 1985.

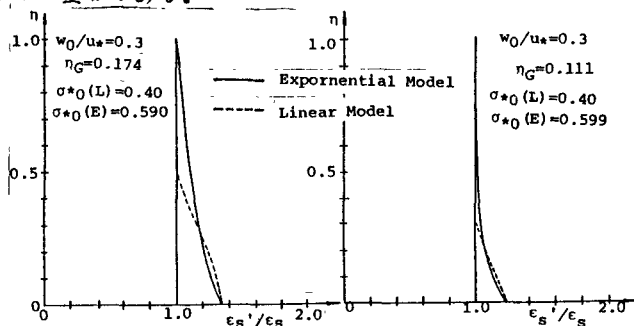


図3. 供給源による浮遊砂の拡散係数の変化