II－3

指数分布・対数正規分布の母数推定の信頼性

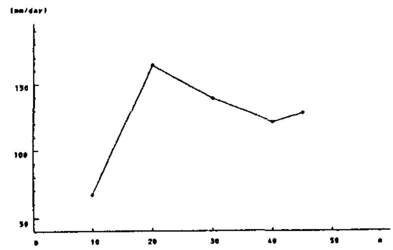
信州大学工学部　正会員　荒木正夫
信州大学工学部　正会員　寒川典昭
信州大学大学院　学生員○上原　剛

1．はじめに

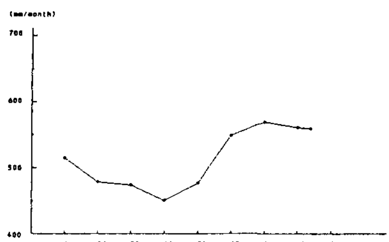
現在、水工計画で用いられている確率水文量には、小標本の資料から計算されているために、多くの不確定さが内在しているものと思われる。この確率水文量の不確定さは、与えられた分布形が母集団の分布形と一致しているならば、資料に関する不確定さ、すなわち推定母数のもつ不確定さによって決定される。本稿では、水文資料が、指数分布・対数正規分布をする場合について考え、資料数増加に伴う母数の不確定さをエントロピーで表現し、実測データへの適用性を検討する。

2．資料数増加に伴う確率水文量の変動性

図－1は、資料数増加に伴う超過100年確率水文量の変動を示したものである。この図から、確率水文量には、多くの不確定さが内在していることがうかがえる。



薮原（6月15日の日降水量）



飯田（9月の月降水量）

図－1　資料数と確率水文量

3．母数の事後分布のエントロピー[1)]

（1）．指数分布の場合

n個の確率変数 $\tilde{x}(n) = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)$ が互いに独立に次式の指数分布に従うとする。

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (1)$$

確率変数 $\tilde{\lambda}$ の事前分布が、ν', k' をパラメタとする

$$f(\lambda) = \frac{\nu'(\nu'\lambda)^{k'-1} e^{-\nu'\lambda}}{\Gamma(k')} \qquad (2)$$

なるガンマ分布を仮定すると、$\tilde{x}(n) = x(n)$ が与えられての $\tilde{\lambda}$ の事後分布は、ν'', k'' をパラメタとするガンマ分布となる。

ここで、

$$\nu'' = \nu' + \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad k'' = k' + n, \quad \nu' = \frac{\theta_\lambda}{V_\lambda}, \quad k' = \frac{\theta^2_\lambda}{V_\lambda} \qquad (3)$$

であり、θ_λ, V_λ は、λの平均と分散である。

したがって、$\tilde{\lambda}$ の事後分布のエントロピーは、次式で与えられる。

$$H(\lambda) = -\ln\left\{\frac{\nu''^{k''}}{\Gamma(k'')}\right\} - \frac{(k''-1)\,\Gamma'(k'')}{\Gamma(k'')} + (k''-1)\ln\nu'' + k'' \qquad (4)$$

（2）．対数正規分布の場合

λとは無関係に、一定で既知のξをもって、確率変数 $\tilde{x}(n)$ が互いに独立に次式の対数正規分布に従うとする。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}\;x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\ln x-\lambda)^2}{\zeta}\right\} \tag{5}$$

確率変数$\tilde{\lambda}$の事前分布が、θ'，v'をパラメタとする

$$f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi v'}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\lambda-\theta')^2}{v'}\right\} \tag{6}$$

なる正規分布を仮定すると、$\tilde{x}(n)=x(n)$が与えられての$\tilde{\lambda}$の事後分布は、θ''，v''をパラメタとする正規分布となる。

ここで、

$$\theta''=\frac{\theta'(\zeta/n)+v'\,\overline{\ln x}}{\zeta/n+v'}\quad ,v''=\frac{v'(\zeta/n)}{v'+\zeta/n} \tag{7}$$

したがって、$\tilde{\lambda}$の事後分布のエントロピーは、次式で与えられる。

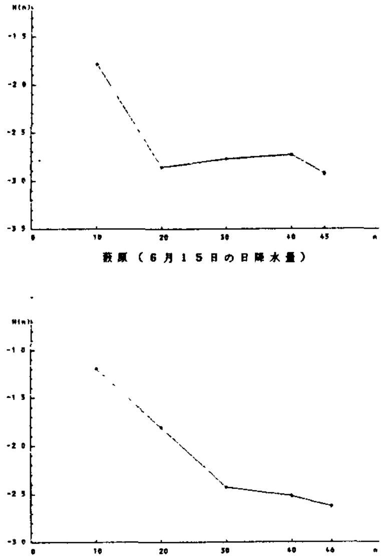
$$H(\lambda)=\ln(2\pi e v'')^{1/2} \tag{8}$$

4．実測資料を用いた計算例

（1）．指数分布の場合

図－2は、資料数と（4）式のエントロピーとの関係を示したものである。この計算にあたり、（3）式のθ_λ，v_λを次のように与えた。

ここで，θ_x，v_xは、全資料（n_{max}）から計算した平均と分散である。この図から、資料数が増加してもエントロピーの値が増加する、つまり推定母数の信頼性が低下するような場合もあることがわかる。


荻原（6月15日の日降水量）

荻原（9月15日の日降水量）

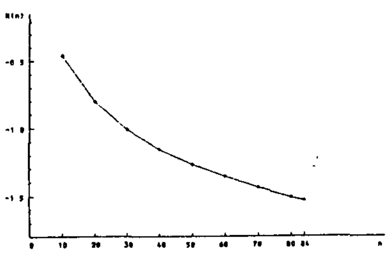
図－2　指数分布の場合の資料数とエントロピー

（2）．対数正規分布の場合

図－3は、資料数と（8）式のエントロピーとの関係を示したものである。この計算にあたり、（7）式のζとv'を次のように与えた。

$$\zeta=v_x\quad ,v'=\frac{v_x}{n_{max}/2}$$

この図から、資料数が増加するにつれてエントロピーの値が減少していくことがわかる。


飯田（9月の月降水量）

図－3　対数正規分布の場合の資料数とエントロピー

5．おわりに

今後、母数の事前分布のパラメタを理論的に与えていくことを検討していきたい。最後に本研究を行うにあたり、信州大学学部生深川君の協力があったことを記し、謝意を表する。

1）伊藤・亀田訳：土木・建築のための確率・統計の基礎，丸善出版株式会社，pp.346-347,1977年.