

信州大学工学部 正 員 荒木正夫

信州大学工学部 正 員 寒川典昭

信州大学大学院 学生員 ○大原基秀

1. はじめに

我々は、今まで最大エントロピー分布を1変数^{1),2)}, 2変数³⁾, さらに多変数⁴⁾へと拡張しながら水文頻度分析への導入を図り、その妥当性を検討してきた。さらに、既存分布の導出を裏付けとして同分布の位置付けを行なった⁵⁾。本稿では、この分布の諸特性を明らかにするため、(1) 推定された確率密度関数がエントロピーを最大にすること、(2) ラグランジュ乗数の一意性、(3) 原点にパルスをもつ分布への適用性、の3点について、多変数最大エントロピー分布から検討する。

2. 諸特性の検討

(1) 推定された確率密度関数がエントロピーを最大にすることの概説⁶⁾

推定された確率密度関数 $p(x_1, \dots, x_N)$ と任意関数 $g_r(x_1, \dots, x_N)$ ($r=1, \dots, M$) の期待値が等しい任意の確率密度関数を $p'(x_1, \dots, x_N)$ とする。すなわち、

$$\int \dots \int g_r(x_1, \dots, x_N) p'(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = \int \dots \int g_r(x_1, \dots, x_N) p(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N, \quad r=1, \dots, M. \quad (1)$$

一般に、

$$-\int \dots \int p'(x_1, \dots, x_N) \ln p'(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \leq -\int \dots \int p'(x_1, \dots, x_N) \ln p(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \quad (2)$$

が成り立ち、確率密度関数が具備すべき条件と (1) 式より次式が導かれる。

$$-\int \dots \int p'(x_1, \dots, x_N) \ln p'(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \leq -\int \dots \int p(x_1, \dots, x_N) \ln p(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \quad (3)$$

これより、推定された確率密度関数のもつエントロピーが最大となることがわかる。

(2) ラグランジュ乗数 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$ の一意性の概説⁶⁾

$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$ を1組の解とするときのエントロピー H は、

$$H = 1 + \sum_{r=1}^M \lambda_r \cdot E[g_r(x_1, \dots, x_N)]. \quad (4)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は期待値記号である。

同様に $\{\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_M\}$ をもう1組の解とするときのエントロピー H' は、

$$H' = 1 + \sum_{r=1}^M \lambda'_r \cdot E[g_r(x_1, \dots, x_N)]. \quad (5)$$

H と H' は等しくなければならないので、(4), (5) 式より、

$$\lambda_r = \lambda'_r, \quad r=1, \dots, M. \quad (6)$$

したがって、ラグランジュ乗数の一意性がわかる。

(3) 原点にパルスをもつ分布への適用性

日降水量などの頻度図のように原点における頻度が他と比べ著しく大きいようなものに対し、従来の最大エントロピー分布では原点付近があまりよく適合しない。そこで、このような場合は原点についてはパルスで確率を表し、その他の部分を最大エントロピー分布でうまく適合させるために、今までの制約条件を(7),(8)式のように置きかえて最大エントロピー分布を算定し、頻度図への適用性をみた。

$$\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} p(x_1, \cdots, x_N) dx_1 \cdots dx_N = 1 - p(0, \cdots, 0) = q, \quad (7)$$

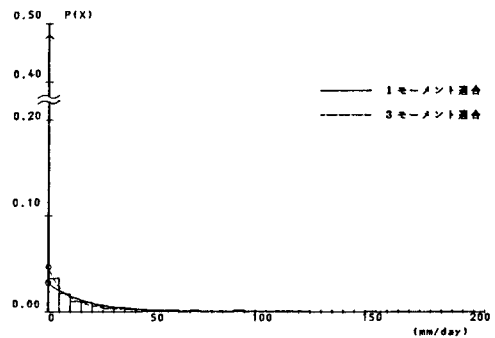
$$\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} g_r(x_1, \cdots, x_N) p(x_1, \cdots, x_N) dx_1 \cdots dx_N = E[g_r(x_1, \cdots, x_N)], \quad r=1, \cdots, N. \quad (8)$$

図の(a)は、福島県の昭和13年から昭和58年までの6月の日降水量データを用いて頻度図に対する適合度を1変数について検討したものである。

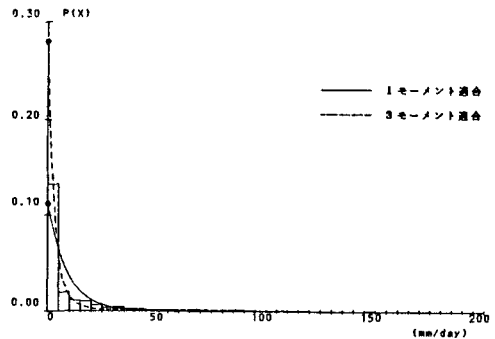
比較のために図の(b)に同じデータで従来の方法で行なったものを示した。これより、従来の方法に比べ、原点付近の適合度が改善され、このような分布形に対しても、最大エントロピー分布は制約条件の与え方をかえるだけで、よい適合度が得られることがわかった。

3. あとがき

本研究では、最大エントロピー分布の諸特性の側面を多変数最大エントロピー分布に基づいて検討した。証明等の詳しい式展開は講演時に発表する。さらに、最大エントロピー分布の極値の数と、高次モーメント適合を考えているので、それについても講演時に触れる。最後に、本研究を行なうにあたり信州大学工学部学生森川智君に援助を得た。記して謝意を表する。



(a) 原点にパルスをもつ分布への適合



(b) 従来の方法での適合

図 福島における6月の日降水量の最大エントロピー分布

- 1) 寒川, 荒木: 水文事象の頻度分析へのMEP導入について, 土木学会論文報告集, No. 335, 1983.7.
- 2) 寒川, 荒木, 小林: 種々の水文量への1変数MEP分布の適用性, 信州大学工学部紀要, 1985.9.
- 3) 寒川, 荒木, 寺島: 2変数MEP分布とその特性に関する研究, 水理講演会論文集, No. 28, 1984.2.
- 4) 寒川, 荒木: 多変数MEP分布の理論式について, 第41回土木学会年講, 1984.10.
- 5) 寒川, 他: 多変数最大エントロピー分布とその基礎特性に関する研究, 土木学会論文集 (投稿中).
- 6) 黒田, 横田: 最大エントロピー法による確率密度関数の推定法, 計測自動制御学会論文集, 1982.1.