II－1

条件付き最大エントロピー分布とその特性について

信州大学工学部　正　員　荒木　正夫
信州大学工学部　正　員　寒川　典昭
信州大学大学院　学生員○今井　俊彦

1．はじめに

最大エントロピー分布とは、任意の制約の下でエントロピーを最大にする分布である。我々は、今まで1変数,2変数及び多変数最大エントロピー分布について考察し、実測データに対する適用性を検討してきた。本研究では、多変数最大エントロピー分布より多変数条件付き最大エントロピー分布を理論展開する。

2．基礎式[1)2)]

条件付き最大エントロピー分布の密度関数は、任意次数のモーメントを制約条件としたとき、次のように与えられる。

$$P_{x_1\cdots x_m}(x_{m+1},\cdots,x_n)=\frac{P(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)}{\int\cdots\int P(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)dx_{m+1}\cdots dx_n} \tag{1}$$

$$=\frac{\exp\{-1-\sum_{a_1=1}^{N_{a_1}}{}_1\gamma_{a_1}x_1^{a_1}-\cdots-\sum_{a_n=1}^{N_{a_n}}{}_n\gamma_{a_n}x_n^{a_n}-\sum_{b_n=0}^{N_{b_n}}\cdots\sum_{b_1=0}^{N_{b_1}}\delta_{b_1\cdots b_n}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\}}{\int\cdots\int\exp\{-1-\sum_{a_1=1}^{N_{a_1}}{}_1\gamma_{a_1}x_1^{a_1}-\cdots-\sum_{a_n=1}^{N_{a_n}}{}_n\gamma_{a_n}x_n^{a_n}-\sum_{b_n=0}^{N_{b_n}}\cdots\sum_{b_1=0}^{N_{b_1}}\delta_{b_1\cdots b_n}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\}dx_{m+1}\cdots dx_n} \tag{2}$$

$$\doteqdot\frac{\exp\{-\sum_{a_1=1}^{N_{a_1}}{}_1\gamma_{a_1}x_1^{a_1}-\cdots-\sum_{a_n=1}^{N_{a_n}}{}_n\gamma_{a_n}x_n^{a_n}-\sum_{b_n=0}^{N_{b_n}}\cdots\sum_{b_1=0}^{N_{b_1}}\delta_{b_1\cdots b_n}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\}}{\int\cdots\int\exp\{-\sum_{a_{m+1}}^{N_{a_{m+1}}}{}_{m+1}\gamma_{a_{m+1}}x^{a_{m+1}}-\cdots-\sum_{a_n=1}^{N_{a_n}}{}_n\gamma_{a_n}x_n^{a_n}-\sum_{b_n=0}^{N_{b_n}}\cdots\sum_{b_1=0}^{N_{b_1}}\delta_{b_1\cdots b_n}x_1^{b_1}\,x_n^{b_n}\}dx_{m+1}\cdots dx_n}. \tag{3}$$

ここで、${}_i\gamma_{a_i}$，$\delta_{b_1\cdots b_n}$はラグランジュ乗数であり、すべての$b_i=0$は確率密度関数の全領域にわたる積分が1となる条件を示す。又、(2) 式においてb_iの1つが値を持ち他は0となる場合は含まれなく、(3) 式において$\delta_{0\cdots0}$の項は分子・分母で消去されていると考える。以後、(3)式で与えられる分布を$M_m^n(N_{a1},\cdots,N_{an},N_{b1},\cdots N_{bn})$と表わす。

3．分布の導出[3)]

水文事象を確率変数とするとき、一般にその存在範囲は〔0，∞）である。分布の領域を〔0，∞）とすることにより (3)式から種々の分布が導出できる。以下にその例を挙げる。

① M_1^2 $(N_{a1},1,0,0)$

$$P_{x_1}(x_2)={}_2\gamma_1\exp\{-{}_2\gamma_1x_2\},$$

ただし、${}_2\gamma_1>0$。

② M_1^2 $(N_{a1},1,1,1)$

$$P_{x_1}(x_2)=({}_2\gamma_1+\delta_{11}x_1)\exp\{-{}_2\gamma_1x_2-\delta_{11}x_1x_2\},$$

ただし、すべてのx_1に対して${}_2\gamma_1+\delta_{11}x_1>0$。

③ $M_1^2(Na_1, 2, 1, 1)$

$$P_{x_1}(x_2)=2\sqrt{\frac{{}_2\gamma_2}{\pi}}\ \frac{\exp\left\{-\dfrac{({}_2\gamma_1+\delta_{11}x_1)^2}{4\,{}_2\gamma_2}-{}_2\gamma_1x_2-{}_2\gamma_2x_2^2-\delta_{11}x_1x_2\right\}}{\operatorname{erfc}\left\{\dfrac{{}_2\gamma_1+\delta_{11}x_1}{2\sqrt{{}_2\gamma_2}}\right\}},$$

ここで、$\operatorname{erfc}z=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_z^\infty e^{-t^2}dt$, ${}_2\gamma_2>0$.

④ $M_1^2(Na_1, 2, 2, 2)$

$$P_{x_1}(x_2)=2\sqrt{\frac{{}_2\gamma_2+\delta_{12}x_1+\delta_{22}x_1^2}{\pi}}$$
$$\times\frac{\exp\left\{-\dfrac{({}_2\gamma_1+\delta_{11}+\delta_{21}x_1^2)^2}{4({}_2\gamma_2+\delta_{12}x_1+\delta_{22}x_1^2)}-{}_2\gamma_1x_2-{}_2\gamma_2x_2^2-\delta_{11}x_1x_2-\delta_{12}x_1x_2^2-\delta_{21}x_1^2x_2-\delta_{22}x_1^2x_2^2\right\}}{\operatorname{erfc}\left\{\dfrac{{}_2\gamma_1+\delta_{11}x_1+\delta_{21}x_1^2}{2\sqrt{{}_2\gamma_2+\delta_{12}x_1+\delta_{22}x_1^2}}\right\}},$$

ただし、すべてのx_1に対して${}_2\gamma_2+\delta_{12}x_1+\delta_{22}x_1^2>0$.

⑤ $M_{n-1}^n(Na_1, \cdots, Na_{n-1}, 2, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n})$

$$P_{x_1\cdots x_{n-1}}(x_n)=2\sqrt{\frac{{}_n\gamma_2}{\pi}}\ \frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{{}_n\gamma_2}\dfrac{({}_n\gamma_1+\sum_{b_{n-1}=0}^{1}\cdots\sum_{b_1=0}^{1}\delta_{b_1\cdots b_{n-1}1}x_1^{b_1}\cdots x_{n-1}^{b_{n-1}})^2}{4}-{}_n\gamma_1x_n-{}_n\gamma_2x_n^2-\sum_{b_{n-1}=0}^{1}\cdots\sum_{b_1=0}^{1}\delta_{b_1\cdots b_{n-1}1}x_1^{b_1}\cdots x_{n-1}^{b_{n-1}}x_n\right\}}{\quad},$$

⑥ $M_{n-2}^n(Na_1, \cdots, Na_{n-2}, 2, 2, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n})$

$$P_{x_1\cdots x_{n-2}}(x_{n-1}, x_n)=2\sqrt{\frac{{}_{n-1}\gamma_2}{\pi}}\exp\left\{-{}_{n-1}\gamma_1x_{n-1}-{}_{n-1}\gamma_2x_{n-1}^2-{}_n\gamma_1x_n-{}_n\gamma_2x_n^2-\sum_{b_n=0}^{1}\cdots\sum_{b_1=0}^{1}\delta_{b_1\cdots b_n}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\right\}$$
$$\Bigg/\left[\int_0^\infty\exp\left\{-{}_n\gamma_1x_n-{}_n\gamma_2x_n^2-\sum_{b_{n-2}=0}^{1}\cdots\sum_{b_1=0}^{1}\delta_{b_1\cdots b_{n-2}01}x_1^{b_1}\cdots x_{n-2}^{b_{n-2}}x_n+\frac{({}_{n-1}\gamma_1+\sum_{b_n=0}^{1}\sum_{b_{n-2}=0}^{1}\cdots\sum_{b_1=0}^{1}\delta_{b_1\cdots b_{n-2}1b_n}x_1^{b_1}\cdots x_{n-2}^{b_{n-2}}x_n^{b_n})^2}{\quad}\right\}\right.$$
$$\left.\times\operatorname{erfc}\left\{\frac{{}_{n-1}\gamma_1+\sum_{b_n=0}^{1}\sum_{b_{n-2}=0}^{1}\cdots\sum_{b_1=0}^{1}\delta_{b_1\cdots b_{n-2}1b_n}x_1^{b_1}\cdots x_{n-2}^{b_{n-2}}x_n^{b_n}}{2\sqrt{{}_{n-1}\gamma_2}}\right\}\right]dx_n,$$

ただし、${}_{n-1}\gamma_2>0$、b_n, b_{n-1}は同時に0にならない。

4．あとがき

ここでは、条件付き最大エントロピー分布の基礎式を示し、さらに種々の分布を導出した。今後は、実測水文量への適用を検討したい。最後に、本研究を行うにあたり協力願った信州大学工学部生船橋太道君に謝意を表する。

1）寒川・荒木；多変数ＭＥＰ分布の理論式について、第41回土木学会年講（昭和５９．１０）．

2）たとえば、竹内啓；数理統計学、PP.43 ～ 44、東洋経済新報社、1963.

3）たとえば、Handbook of Mathematical Function、P.302、Dover Publications,INC.、1972.