クラックを含む弾性体の換算ヤング率

岐阜大学工学部　学生員○木村映二
岐阜大学工学部　学生員　段　樹金
岐阜大学工学部　正会員　中川建治

1．まえがき

クラック近傍の応力や変位を取り扱った問題はこれまでに種々の理論解析が行なわれ、数多くの成果が得られている。本研究では従来のクラック理論を応用し等方性無限弾性領域においてクラックが不規則に存在する場合の換算ヤング率を2次元問題として計算したものである。これらは薄い弾性平板においてクラックが発生したときのヤング率を考える場合、あるいはクラックが非常に発達した岩盤のヤング率を推定するのに有効であろうと思われる。また、解析に際しては次のような条件を考慮した。

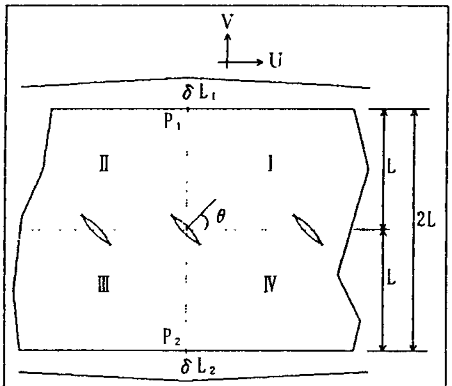
a．無限板内に一様分布の存在確率で直線状のクラック(長さ2a)が存在する。

b．クラックは単位面積当りm個の平均で分布している。

c．クラック傾きは[0，2π]間に一様分布している。

2．解法の基本及び手順

弾性体内部に不規則に存在するクラックが変位分布にいかなる影響を及ぼすかを計算する場合。基本的にはクラック開口のみによる上下の基本線上(標点距離)の変位量を解析的に求めさえすれば、応力－ひずみ関係式からこの弾性体のもつ低減されたヤング率は機械的に導かれる。図－1に示す1個のクラックが無限板内に一様の確率で存在するものとして基準線上の点P_1，P_2における変位量δL_1，δL_2を求めることは幅2Lの無限帯板の中心にクラックを据えて変位量Vの総和を求めることにほかならない。ここでδL_1とは幅2Lの無限帯板の中心クラックによる領域ⅠとⅡにおける変位量Vであり、δL_2は領域ⅢとⅣにおける変位量Vである。クラックが単位面積当たりm個存在することによるδL_1とδL_2との平均値δは領域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳにおける変位Vのm倍とすればよい。数学的にはクラック開口応力のみによる変位関数を平面全体にわたって積分することになる。以上のクラックによる変位に加えてさらに弾性変位を重ね合わせることによりクラックを含んだ弾性体のひずみが得られる。これらのひずみを基本的には1軸引張あるいは2軸引張状態のひずみと等価すれば求めようとする換算ヤング率が得られる。



図－1

3．変位関数

従来の等方性クラックの解析で用いられている応力関数$W=\bar{z}\phi(z)+\phi(z)$と変位成分の関係から、弾性体上に定めた平面座標における基礎的な変位関数は複素変数を用いると一般に次式で表わされる。

$$E(u-iv)=K\overline{\phi(z)}-(1+\nu)\bar{z}\phi(z)'-(1+\nu)\phi(z)' \qquad (1)$$

平面応力 ；$K=(3-\nu)$

平面ひずみ；$K=(3-4\nu)(1+\nu)$

ここに、uはξ方向変位、vはη方向変位を表し、Eは弾性係数、νはポアソン比である。また$\phi(z)$、$\psi(z)$はクラックが無限遠方で一様な引張応力あるいはせん断を受ける場合では異なる解析関数となる。$\overline{\phi(z)}$は$\phi(z)$の共役関数であることを示す。図－2に展開した任意な傾きのクラックを含む無限帯状板が対象となる。

4．平面応力状態あるいは平面ひずみ状態における換算ヤング率

無限遠方の一様応力を除去して得られるクラック開口応力のみによる伸びの影響を表す変位関数は次のようになる。(2)式が引張変位関数、(3)式がせん断変位関数である。

$$E(u-iv)=1/2\,\sigma x_0[K_1\sqrt{z^2+a^2}+K_2\frac{(z\bar{z}-a^2)}{\sqrt{z^2+a^2}}+K_3\bar{z}] \qquad (2)$$

$$E(u-iv)=-i/2\,\tau xy_0[K_4\sqrt{z^2+a^2}+K_5\frac{(z\bar{z}+2z^2+a^2)}{\sqrt{z^2+a^2}}+K_6 z] \qquad (3)$$

平面応力 ；$K_1=K_4=(3-\nu),K_2=-(1+\nu),K_3=-2(1-\nu),K_5=(1+\nu),K_6=-2(1+\nu)$

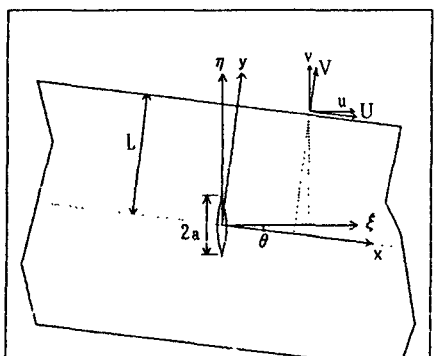
平面ひずみ；$K_1=K_4=(1+\nu)(3-4\nu),K_2=-(1+\nu),K_3=2(2\nu-1)(1+\nu)$

$K_5=(1+\nu),K_6=-2(1+\nu)$

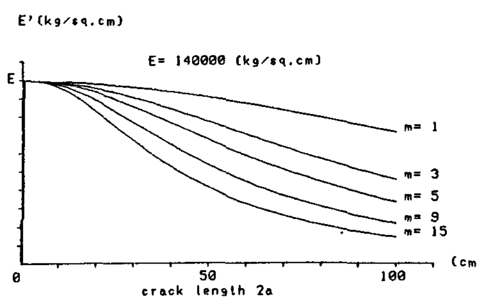
これらの変位関数は$z=a,-a$を分岐点に持つ2価関数である。従って(2),(3)式を全平面にわたって積分するについては弾性平面におけるクラック開口部を分岐線とする2葉の平面からなるRiemann面を考慮する必要がある。ここでは繁雑な積分値の計算に際しては変数の組み合わせを考えてTaylor展開で近似した。クラック傾度は$1/2\pi$の確率で一様分布しているので上述のようにして得た変位解を角度についてさらに$[0,2\pi]$間で積分すると任意な方向をもつクラックが単位面積当りm個分布している弾性体の変位量が定まる。変位－ひずみ関係式からひずみを求め1軸引張状態のひずみと等価すると目的とする弾性体の換算ヤング率E'が次式のように求められる。

$$E'=2E/(2+a^2\pi m) \qquad (4)$$

(4)式にaとmを与えて図化したのを図－3に示した。この図においてaとmを指定すると従来のヤング率Eからの低減率つまり換算ヤング率E'が読取れるようになっている。単位面積当たりのクラック数などは、たとえば岩盤工学では岩盤の割れ目間隔で区分しているが定量化するのは難しい。尚、今回は確率的な手法は平均値を用いるのにとどめた。



図－2



図－3