# 半楕円剛体介在物を有する半無限板の応力解析

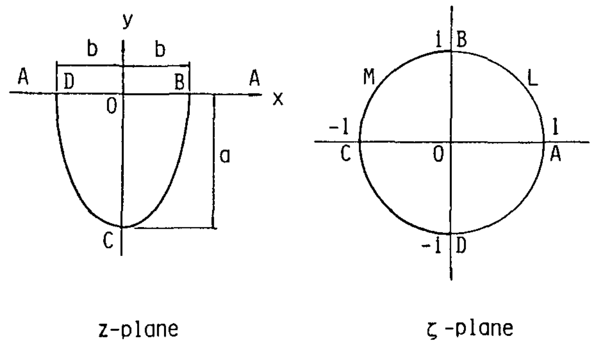
名古屋工業大学　学生員　○筒井 盛治
名古屋工業大学　正 員　長谷部 宣男
名古屋工業大学　正 員　杉本 孝博

1．まえがき　一様な弾性体に切欠きや介在物が存在する場合、一様な応力状態とならず応力集中等の危険な状態が生じうる。本報告では半無限板に半楕円の剛体介在物を有する場合の応力解析を平面弾性混合境界値問題として、単位円内に写像する有理関数と複素応力関数を用いて解く。このモデルは剛体介在物としての他、剛な柱や梁を含む壁や床等の半平面と考えられる。この場合境界上の応力分布は柱や梁を固定端とする反力となる。荷重は本報告では無限遠での$x$軸方向一様引張を受ける場合を考える。剛体介在物は剛さが無限大という一方の極限であるが他方の極限，剛さ＝0，つまり切欠きの場合はすでに発表している[1]。パラメーターとして楕円の$x$軸方向と$y$軸方向の主軸の長さの比、およびポアソン比を用いる。$x$軸方向の主軸の長さ＝0，つまり線状剛体介在物を有する場合はすでに発表している[2]。

2．解 法　図－1に示すような物理領域（Z－Plane）を単位円内に写像する関数は$a=0$（半平面）のときと$b=0$（鉛直方向クラックを有する半平面）の和として得られ次式のようになる[1]。

$$Z = -ib\frac{1+\zeta}{1-\zeta} - i\sqrt{2}\,a\frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{1-\zeta} \qquad (1)$$

上式から5次式の形の有理関数を作って解析に用いる[1,3]。




図－1 物理領域と単位円

$$Z = \omega(\zeta) = \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^{n}\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta} + E_{-1} \qquad (2)$$

境界条件としてBCDでは$u=v=0$（変位拘束,M）、DABでは$P_x=P_y=0$（自由境界,L）、荷重として無限遠での$x$軸方向一様引張力Pを考えると応力関数は次式のようになる[2]。ただし$u$，$v$はそれぞれ$x$，$y$軸方向の変位、$P_x$，$P_y$はそれぞれ$x$，$y$軸方向の外力である。

$$\varphi(\zeta) = \chi(\zeta)\left\{\frac{PE_0}{4\chi(1)(1-\zeta)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\bar{A}_k B_k + PE_k/4)}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k-\zeta)}\right\} \qquad (3)$$

$$\psi(\zeta) = -\bar{\varphi}(1/\zeta) - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) \qquad (4)$$

ここで$\chi(\zeta)$はPlemelj関数で、$(\zeta-\alpha)^m(\zeta-\beta)^{1-m}$，$m=0.5-i(\ln K)/(2\pi)$、$A_k$は未定定数で，$\varphi'(\zeta_k')$，$\zeta_k'=1/\overline{\zeta_k}$、$B_k$は定数で，$E_k/\overline{\omega'(\zeta_k')}$、ただしKはポアソン比を$\nu$とすると$K=3-4\nu$（平面ひずみ），$K=(3-\nu)/(1+\nu)$（平面応力）である。

3．解析結果　図−2に$b/a=0.5$，$K=1,2,3$の場合の応力分布を示す．また図−3に$b/a=1$（半円），$K=2$の場合の応力分布を示す．$K=1,2,3$はポアソン比が平面ひずみの場合$\nu=0.5$，$0.25$，$0$、平面応力の場合$\nu=1$，$1/3$，$0$である．剛境界上では$\sigma_\theta/\sigma_r=(3-K)/(1+K)$の関係がある[4]．$K=1,2$の場合には形状が急変するB点，D点で応力集中が見られ、ハク離が起こりうると考えられる．またC点付近では$K=3$の場合$\sigma_r$が正値を持つが$K=1,2$の場合は負値となる．これは荷重が無限遠で$x$軸方向一様圧縮の場合引張が生じることを示す．

4．あとがき　B点，D点からハク離を生じた場合の応力解析を平面弾性混合境界値問題として解く場合は、前述の解法でのPlemelj関数の$\alpha$，$\beta$の値を変えることにより求められる．ただしB点，D点からのハク離の長さが等しくない場合は半楕円剛体介在物の回転を許さない場合に相当する．回転を許す場合には半楕円剛体介在物に作用するモーメントを考慮する必要がある[2]．荷重が無限遠での$x$軸方向一様圧縮でポアソン比が大きい場合C点付近に引張が生じることから、この付近でハク離が生じる可能性がある．

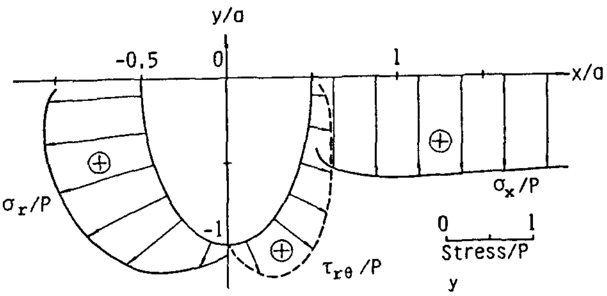

[参考文献]

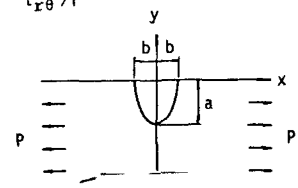
[1]長谷部　名古屋工業大学学報 第24巻 PP.295−301，1972

[2]Hasebe N., Takeuchi T.　Int.J.Engng Sci.Vol.23，No.5，PP.531−539，1985

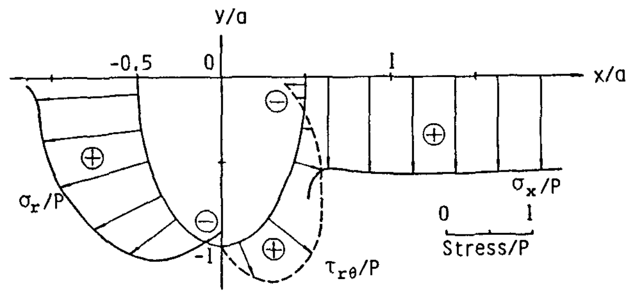
[3]長谷部，三浦　日本機械学会論文集(A編)47巻423号，PP.1129−1138，1981

[4]Hasebe N.　Ingenieur−Archiv 48 PP.129−141，1979

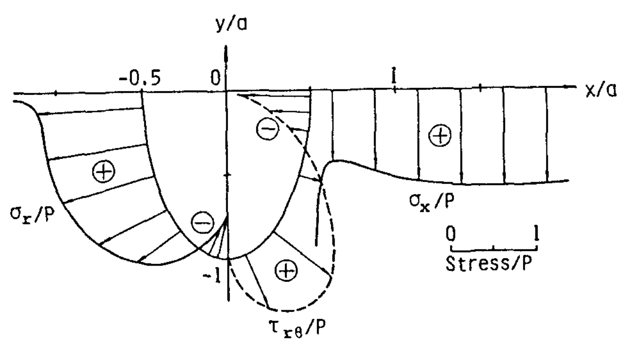



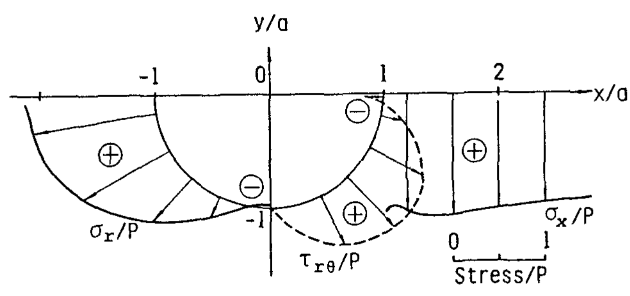

図−2(a)　応力分布　$b/a=0.5$　$K=3$




図−2(b)　応力分布　$b/a=0.5$　$K=2$




図−2(c)　応力分布　$b/a=0.5$　$K=1$




図−3　応力分布　$b/a=1$　$K=2$