2か所変位拘束のある孔を有する無限弾性体の縦せん断問題

名古屋工業大学　正員　○長谷部宣男
名古屋工業大学　正員　　杉本　孝博

まえがき　2か所の固定区間を有する等方均質、一様縦せん断混合境界値問題の複素応力関数を、写像関数を用いて閉じた形で求める。文献[1]では任意形状半無限弾性体について報告した。ここでは有孔無限弾性体に対して考察する。さらに解析例では2か所固定問題の解を利用して対称性を有する2重連結弾性体に関する応力解析を行い、応力分布の例を示す。さらにクラックの問題の例として応力拡大係数を求める式を示す。

解法　図－1に示すように任意形状の孔を有する無限領域を複素平面 $z=x+iy$ 上にとる。これを単位円外に写す写像関数として次式に示す有理写像関数を用いる[2]。

$$z=\omega(\zeta)=E_c\zeta+\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta}+E_{-1} \qquad (1)$$

z 平面、ζ 平面上の諸量を図－1のようにとる。領域内（単位円外）で正則な複素応力関数 $\varphi(\zeta)$ は縦せん断応力 τ_{xt}、τ_{yt} および写像関数で表わされる曲線座標における応力成分 τ_{rt}、$\tau_{\theta t}$ と次のような関係をもつ。ただし G はせん断弾性係数である。

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{rt}-i\tau_{\theta t}=e^{i\rho}(\tau_{xt}-i\tau_{yt})=e^{i\rho}G\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)\\&e^{i\rho}=\zeta\omega'(\zeta)/|\zeta\omega'(\zeta)|\end{aligned}\right\}(2)$$

境界上の変位の式と外力との釣合い式とを組み合わせることにより、境界条件式は次のようになる。ただし σ は単位円周上の点であり、$\int\tau_{rt}ds+C_0$ は合力、w は縦方向の変位である。

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\sigma)+\delta(\sigma)\varphi(\sigma)-\overline{\varphi(\sigma)}=f(\sigma)\\&\delta(\sigma)=\begin{cases}0 & \text{on } L\\-2 & \text{on } M\end{cases},\quad f(\sigma)=\begin{cases}\frac{2i}{G}\left[\int\tau_{rt}ds+C_0\right] & \text{on } L\\-2w & \text{on } M\end{cases}\end{aligned}\right\}(3)$$

境界条件は L_2 上で $f(\sigma)=2iC_c/G$、他の境界で $f(\sigma)=0$ である。C_c は M_1 上の合力を意味する。また求めたい応力関数を $\varphi(\zeta)=\varphi_0(\zeta)+\varphi_1(\zeta)$ とする。ここで $\varphi_0(\zeta)$ は遠方で一様な応力状態を表わす応力関数で $\varphi_0(\zeta)=\tau_0e^{-i\lambda}\omega(\zeta)/G$ である。

式(3)に $d\sigma/\{2\pi i(\sigma-\zeta)\}$ を乗じ、単位円周上で積分することによって得られる積分方程式を解き、上の諸条件式を考慮すると最終的に $\varphi(\zeta)$ が次のように求まる。

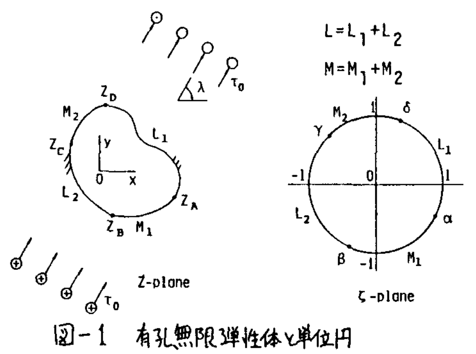
$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\zeta)=\frac{\tau_0}{G}e^{i\lambda}\frac{\overline{E_c}}{\zeta}\frac{\chi(\zeta)}{\chi(0)}+\frac{C_c}{G\pi}F(\zeta)+\mathrm{const}\\&F(\zeta)=\log\frac{\gamma-\zeta}{\beta-\zeta}-\frac{\chi(\zeta)}{\pi i}\int_M\frac{\log\frac{\gamma-\sigma}{\beta-\sigma}}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma\\&\chi(\zeta)=(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}(\zeta-\gamma)^{\frac{1}{2}}(\zeta-\delta)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}(4)$$

$F(\zeta)$ の一次導関数 $F'(\zeta)$ は文献[1]によって次のように求められている。

$$\left.\begin{aligned}F'(\zeta)=B\Big\{&\zeta^2-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\zeta+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\\&-1+D_0(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)\Big\}y(\zeta)\\y(\zeta)=(&\zeta-\alpha)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-\beta)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-\gamma)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-\delta)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}(5)$$

B はまだ未定の定数である。D_0 は一般に楕円積分を含む定数であり、$\delta=\bar{\alpha}$、$\gamma=\bar{\beta}$ のとき次のようになる。ただし $K(k)$、$E(k)$ はそれぞれ第1種、第2種の完全楕円積分である。

$$D_0=-\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{2}\right)^2\left[1-\frac{E(k)}{K(k)}\right]+\frac{1}{4}$$



図－1　有孔無限弾性体と単位円

$$k^2=\left(\frac{\frac{1}{1-\beta}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{2}}\right)^2 \qquad (6)$$

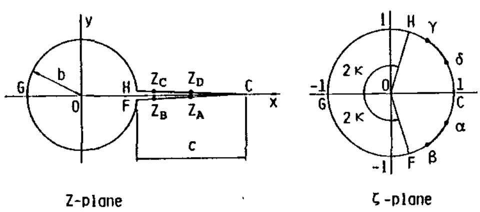
式(4)の一次導関数に式(5)を代入すれば$\varphi'(\zeta)$が得られる。この場合、まだ決定されていない定数$BC_c/G\pi$は無限遠における応力の条件、すなわち$\varphi'(\infty)/\omega'(\infty)=e^{-i\lambda}\tau_0/G$によって決定され、$B\cdot C_c/G\pi=\tau_0/G\cdot\{e^{i\lambda}E_c-e^{-i\lambda}\bar{E}_c\psi(0)\}$となる。結局$\varphi'(\zeta)$は次のように求められる。

$$\begin{aligned}\varphi'(\zeta)=&-\frac{\tau_0}{G}e^{i\lambda}\bar{E}_c\left\{\frac{1}{\zeta^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)\frac{1}{\zeta}\right\}\frac{\psi(\zeta)}{\psi(0)}\\&+\frac{\tau_0}{G}e^{-i\lambda}E_c\left\{\zeta^2-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\zeta\right\}\psi(\zeta)\\&+\frac{\tau_0}{G}\{e^{-i\lambda}E_c-e^{i\lambda}\bar{E}_c\psi(0)\}\left\{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-1\right.\\&\left.+D_0(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)\right\}\psi(\zeta)\end{aligned}\qquad (7)$$

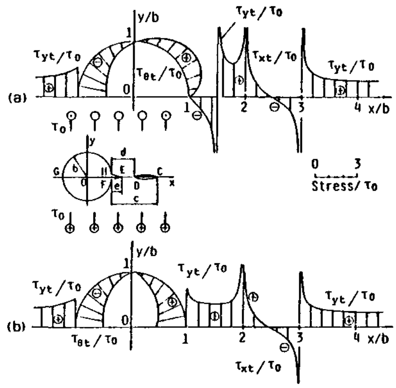
解析例 図−2に示す、クラックのある円孔を有する無限弾性体を考える。この形状を単位円外に写像する写像関数は次式で与えられる[3]。

$$\begin{aligned}z=\omega(\zeta)=&\left\{\zeta+\frac{1}{\zeta}+1+\cos 2K+\left(1+\frac{1}{\zeta}\right)\cdot\right.\\&\left.(\zeta^2+2\zeta\cos 2K+1)^{\frac{1}{2}}\right\}/2\sin^2 K\\c/b=&\,2\cos K/(1-\cos K),\quad E_c=1/\sin^2 K\end{aligned}\qquad (8)$$

荷重の方向はy軸方向、すなわち式(7)で$\lambda=\pi/2$とする。クラックの一部分を図−2のように対称な位置で固定、すなわち$z_D=z_A(\delta=\bar{\alpha})$、$z_C=z_B(\gamma=\bar{\beta})$とすると、この解は図−3に示す2重連結領域の問題の解である。さらに固定区間が円境界にまで及んだ場合、円形剛体介在物にハク離とDetouched クラックがある問題となる。さらに$\beta=\gamma$とすれば、ハク離のない状態になる。以上のような問題の例として、2種類の応力分布を図−3(a)、(b)に示す。(a)は円孔の一部にクラックがあり、さらにその延長線上にDetouchedクラックがある場合、(b)は円孔とDetouched クラックがある場合の応力分布である。



図−2 クラックを有する円孔と単位円



図−3 2重連結弾性体と応力分布
(a) c/b=2、d/b=1、e/b=0.5
(b) c/b=2、d/b=1、e/b=0

図−3におけるクラック先端の応力拡大係数は次のように与えられる。まずC点に対して、

$$K_{III}=\sqrt{\pi}\,iG\varphi'(1)/\sqrt{\omega''(1)} \qquad (9)$$

$\zeta=1$はC点に対応するζ平面上の点である。D点、E点では固定端の特異性を利用して、

$$\begin{aligned}K_{III}&=-\sqrt{2\pi}\,G[(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}\varphi'(\zeta)]_{\zeta=\alpha}/\sqrt{\omega'(\alpha)}\quad \text{at D}\\K_{III}&=\sqrt{2\pi}\,iG[(\zeta-\gamma)^{\frac{1}{2}}\varphi'(\zeta)]_{\zeta=\gamma}/\sqrt{\omega'(\gamma)}\quad \text{at E}\end{aligned}\qquad (10)$$

となる。

あとがき 境界上の変位が2か所で固定された任意形状の孔を有する無限弾性体が一様縦せん断荷重を受ける場合の応力関数が一次導関数の形で式(7)のように得られた。この式はE_c以外写像関数には関係しない。したがって応力計算では式(1)の有理写像関数を用いる必要はなく、式(8)のような無理型のものを用いればよい。また本報告では2か所固定の問題を考察したが、式(7)において$\beta=\gamma$とすることにより1か所固定の問題の解も得られる。

解析例では対称性のある2重連結弾性体の問題の解が得られることを示した。2重連結の問題の他に、剛体介在物上の2か所にハク離、あるいはクラックが生じている問題などの解も式(7)によって得られる。

参考文献 1. 杉本、長谷部 昭和60年度土木学会中部支部講演概要集 I-28. 2. Hasebe、N. and Ueda、M.、Eng. Frac. Mech.、Vol. 13、No. 4、1980、PP. 913-923. 3. Bowie、O. L.、J. Math. Phys.、Vol. 35、1956、PP. 60-71.