# 2か所変位拘束のある任意形状半無限弾性体の縦せん断問題

名古屋工業大学　正員　○杉本　孝博
名古屋工業大学　正員　　長谷部宣男

まえがき　2か所の固定区間を有する等方均質、一様縦せん断混合境界値問題の複素応力関数を、写像関数を用いて閉じた形で求める。1か所の固定区間を有するこの種の問題では、閉じた形で応力関数を求めることができる。2か所固定の問題では積分形を含んだ形で解が得られるが、その積分を行うことは難しい。しかしこの積分項の一次導関数は積分形を含まない閉じた形で求められる。最終的に複素応力関数が一次導関数の形で得られる。なお、本報告では任意形状半無限弾性体を考える。文献[1]では有孔無限弾性体に対する同様な問題について報告する。

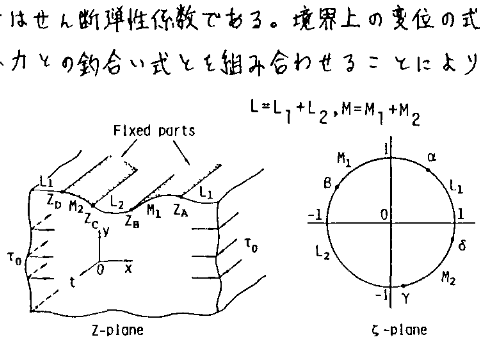
解法　図－1に示すように複素平面$z=x+iy$上に半無限領域をとる。これを$\zeta$平面上の単位円内部に等角写像する写像関数として、次式に示す有理写像関数を用いる[2]。

$$z=\omega(\zeta)=\frac{E_R}{1-\zeta}+\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta}+E_{-1} \qquad (1)$$

$z$平面、$\zeta$平面上の諸量を図－1のようにとる。領域内で正則な複素応力関数$\phi(z)=\phi(\omega(\zeta))\equiv\varphi(\zeta)$は縦せん断応力$\tau_{xt}$、$\tau_{yt}$と次のような関係をもつ。

$$\tau_{xt}-i\tau_{yt}=G\phi'(z)=G\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta) \qquad (2)$$

$G$はせん断弾性係数である。境界上の変位の式と外力との釣合い式とを組み合わせることにより、




図－1　半無限弾性体と単位円

境界条件式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\sigma)+\delta(\sigma)\varphi(\sigma)-\overline{\varphi(\sigma)}=f(\sigma)\\&\delta(\sigma)=\begin{cases}0 & \text{on } L\\-2 & \text{on } M\end{cases}、\quad f(\sigma)=\begin{cases}\frac{2i}{G}\left[\int\tau_{rt}ds+C_0\right] & \text{on } L\\-2w & \text{on } M\end{cases}\end{aligned}\right\}(3)$$

$\sigma$は単位円周上の点であり、$\int\tau_{rt}ds+C_0$は合力、$w$は縦方向の変位である。境界条件は$L_2$上で、$f(\sigma)=2iC_R/G$、他の境界で$f(\sigma)=0$である。$C_R$は$M_1$上の合力を意味する。また求めたい応力関数を$\varphi(\zeta)=\varphi_0(\zeta)+\varphi_1(\zeta)$とする。ここで$\varphi_0(\zeta)$は遠方で一様な応力状態を表わす応力関数で、$\varphi_0(\zeta)=\tau_0/G\cdot\omega(\zeta)$である。式(3)に$d\sigma/\{2\pi i(\sigma-\zeta)\}$を乗じ、単位円周上で積分することによって得られる積分方程式を解き、上の諸条件式も考慮してやると最終的に$\varphi(\zeta)$が次のように求まる。

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\zeta)=\frac{\tau_0}{G}\frac{E_R}{1-\zeta}\frac{\chi(\zeta)}{\chi(1)}-\frac{C_R}{G\pi}F(\zeta)+const\\&F(\zeta)=\log\frac{\gamma-\zeta}{\beta-\zeta}-\frac{\chi(\zeta)}{\pi i}\int_M\frac{\log\frac{\gamma-\sigma}{\beta-\sigma}}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma\\&\chi(\zeta)=(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}(\zeta-\gamma)^{\frac{1}{2}}(\zeta-\delta)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}(4)$$

式(4)の$F(\zeta)$の中の積分は難しそうである。しかし$\varphi(\zeta)$の一次導関数$\varphi'(\zeta)$は次のようにして求めることができる。式(4)を見ると$\varphi(\zeta)$は写像関数式(1)の中の$E_R$以外、$E_k$や$\zeta_k$を含んでいない。これはまったく平らな半無限体の$\varphi(\zeta)$も任意形状の$\varphi(\zeta)$も同じ解であることを意味している。ただし$E_R$は解くべき形状のものを用いなければならない。以上のことも利用して、まずまったく平らな半無限体の解を一次導関数の形、すなわち$\phi'(z)$で求め、これから任意形状の$\varphi'(\zeta)$を求める。これにより$F'(\zeta)$も求めることができる。

境界が$x$軸である半無限体の問題を考える。

境界条件式は応力の自由境界での解析接続の原理を用いて次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\phi'^{+}(\xi)+\phi'^{-}(\xi)&=2\partial w/\partial x \quad \text{on } M\\ \phi'^{+}(\xi)-\phi'^{-}(\xi)&=-2i\tau_{yz}/G \quad \text{on } L\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

ξはx軸上の点である。このRiemann-Hilbert問題を解き、境界条件、無限遠での条件を考慮すると$\phi'(z)$は結局次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\phi'(z)&=\left(\frac{\tau_0}{G}z^2+b_1z+b_0\right)Y(z)\\ Y(z)&=(z-z_A)^{-\frac{1}{2}}(z-z_B)^{-\frac{1}{2}}(z-z_C)^{-\frac{1}{2}}(z-z_D)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$b_1$、$b_0$は未定係数である。式(6)に半無限領域を単位円内に写像する写像関数$z=E_R/(1-\zeta)-E_R/2$を代入すると、$\phi'(z)=\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$より$\varphi'(\zeta)$が次のように求まる。

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(\zeta)&=\frac{\tau_0}{G}E_R\left\{\frac{1}{(1-\zeta)^2}+\frac{D_1}{1-\zeta}+D_0\right\}\frac{y(\zeta)}{y(1)}\\ y(\zeta)&=(\zeta-\alpha)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-\beta)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-\gamma)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-\delta)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

係数$D_1$、$D_0$は次のようにして決められる。無限遠において合力＝0であることより、$\{(1-\zeta)^2\varphi'(\zeta)\}'_{\zeta=1}=0$であり、これから$D_1$が次のように決定される。

$$D_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}+\frac{1}{1-\delta}\right)\quad(8)$$

$D_0$は2つの固定区間$M_1$、$M_2$の相対変位の条件より決定される。相対変位がゼロであるという条件と、$L_2$区間が自由境界であるということを組み合わせることにより、次式を得る。

$$\varphi(\gamma)-\varphi(\beta)=\int_{\beta}^{\gamma}\varphi'(\sigma)d\sigma=0\quad(9)$$

式(9)は複素平面上の単位円周の弧に沿った積分である。これを変換$\xi=E_0/(1-\sigma)-E_0/2$によって実積分に変換する。$E_0$は適当な純虚数である。$D_0$は実積分を含んだ形で次のように書かれる。

$$\left.\begin{aligned}D_0&=-\frac{I(2)+E_0(1+D_1)I(1)}{E_0^2\,I(0)}-\frac{1}{4}-\frac{D_1}{2}\\ I(2)&=\int_{\xi_B}^{\xi_C}\xi^2\Upsilon^*(\xi)d\xi\ 、\ I(1)=\int_{\xi_B}^{\xi_C}\xi\Upsilon^*(\xi)d\xi\\ I(0)&=\int_{\xi_B}^{\xi_C}\Upsilon^*(\xi)d\xi\\ \Upsilon^*(\xi)&=(\xi-\xi_A)^{-\frac{1}{2}}(\xi-\xi_B)^{-\frac{1}{2}}(\xi-\xi_C)^{-\frac{1}{2}}(\xi-\xi_D)^{-\frac{1}{2}}\\ \xi_A&=E_0/(1-\alpha)-E_0/2\ 、\ \xi_B=E_0/(1-\beta)-E_0/2\\ \xi_C&=E_0/(1-\gamma)-E_0/2\ 、\ \xi_D=E_0/(1-\delta)-E_0/2\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

I(2)、I(1)、I(0)の誘導は煩雑になるため省略する。ただしこれらの積分は一般に楕円積分を含む。また特に$\delta=\bar{\alpha}$、$\gamma=\bar{\beta}$であるような場合、$D_0$は次のような簡単な形になる。

$$\left.\begin{aligned}D_0&=-\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{2}\right)^2\left[1-\frac{E(k)}{K(k)}\right]+\frac{1}{4}\\ k^2&=\left(\frac{\frac{1}{1-\beta}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{2}}\right)^2\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

K(k)、E(k)はそれぞれ第1種、第2種の完全楕円積分である。

次に$F'(\zeta)$を求める。式(4)を1回微分したものと、式(7)とは同じものであるから、これを比較することにより、$F'(\zeta)$が次のように求まる。

$$\left.\begin{aligned}F'(\zeta)=B\{&\zeta^2-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\zeta+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\\ &-1+D_0(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)\}y(\zeta)\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Bは形状や荷重には無関係な定数である。

あとがき　任意形状半無限弾性体の応力関数が一次導関数の形で式(7)のように得られた。$D_1$、$D_0$は式(8)、式(10)また対称性のある場合は式(11)より得られる。$E_R$は解くべき形状の写像関数の$1/(1-\zeta)$の項の係数である。また写像関数の一次導関数$\omega'(\zeta)$が求められれば式(2)より応力は計算できる。この場合の$\omega'(\zeta)$は有理写像関数を用いる必要はなく、無理型のものを用いてもよい。なお、形状が多角形のものであればSchwarz-Christoffelの変換公式により$\omega'(\zeta)$は簡単に求めることができる。

参考文献　1. 長谷部、杉本　昭和60年度土木学会中部支部講演概要集 I-29。　2. Hasebe, N.、Ingenieur－Archiv、Heft 48、1979、PP 129－141.