固有マトリクス法による高層建築の動的解析

信州大学　正員○夏　目　正　太　郎
〃　　〃　石　川　　清　志

長大構造物の振動問題は、部材の数が非常に多く、振動そのものは各部材の挙動の集積であろうが、全体としての動きに着目したい。そこで各断面を考えてみると、局部的な部材の断面の集りが見られる。そして部材配置は断面ごとに異る所もあるので、それぞれ隣接断面と異なるものを考えることとなるので、変断面の梁または棒構造と見做してもよかろう。変断面たわみ振動の微分方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\gamma A(x)}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P\sin pt \qquad (1)$$

のように書けるが、この振動体を細分割するとき、その分割要素の中では一様断面と見做すとすれば

$$EI_r\frac{\partial^4 w_r}{\partial x^4}+\frac{\gamma A_r}{g}\frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2}=P\sin pt \qquad (2)$$

の型になる。故に去然の微分方程式は(2)を用いることとする。これを解くには、右辺をゼロにした斉次解と、右辺外力項が活きている特解との和で表わされるが、固有マトリクス法では特解である右辺の項を荷重マトリクスとして誘導するので、斉次解と同じく右辺をゼロとした解を用いるのである。

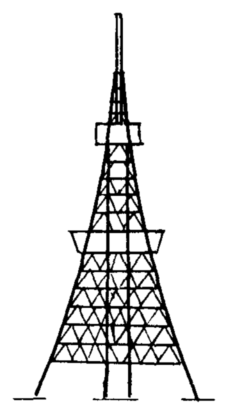
$$w = w_h + w_p \qquad (3)$$

$$w_{h_r}=\lfloor \cos\alpha\rho\ \ \sin\alpha\rho\ \ \mathrm{ch}\,\alpha\rho\ \ \mathrm{sh}\,\alpha\rho \rfloor_r N_r e^{i\omega t}\ ;\quad w_{p_r}=\lfloor \cos\beta\rho\ \ \sin\beta\rho\ \ \mathrm{ch}\,\beta\rho\ \ \mathrm{sh}\,\beta\rho \rfloor_r N_r \sin pt \qquad (4)$$

$$\alpha_r^4=\frac{\gamma A_r\omega^2}{gEI_r}l_r\ ;\quad \beta_r^4=\frac{\gamma A_r p^2}{gEI_r}l_r \qquad (5)$$

である。これらたわみ式より、たわみ角，曲げモーメント，せん断力が誘導され状態量が得られる。

例えば右の図に見るような塔について考えてみると、先端の棒の部分が支柱曲線に支えられ上部の器械室まで達している。そこから地上までエレベーターシャフトが延びて、中間の展望室を横切るとする。支柱はそれぞれ補剛トラスで連結して剛性を保っている。これ全体を1つの変断面の片持梁と考えてみた。器械室と展望室は附加質量として扱い、支柱間の補剛トラスは平均化されたわくの如く考える。故に各断面で断面積，断面2次モーメントに寄与するのは、先端の棒，曲線支柱，エレベーターシャフト，補剛トラスであり、これらの自重も附加質量として分布質量による質量マトリクスを造るし、器械室、展望室は集中質量マトリクスを用いることになる。附加質量はそれ自身から運動を起すのでなく、振動体が運動することにより、その加速度の働きでせん断力に貢献することになる。



$$S' - S = (\mathrm{mass})\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (6)$$

の型で混入される。

構造物の強制振動は、境界値問題と初期値問題の解で得られる。前者には、固有振動数を求める作業と、強制力による固有マトリクスを解く仕事が含まれる。すでに述べたように外力は荷重マトリクスで取り込むので斉次解と特解は殆んど同じ手順によって計算が出来る。漸化式はつぎのようになる

$$N^h_r = [R^{-1}_{(0)} D^{-1}]_r [R_{(1)} \cdot D\, K_{(\omega)}]_{r-1} N^h_{r-1} \quad , \quad N^p_r = [R^{-1}_{(0)} D^{-1}]_r [D\, R_{(1)}\, K_{(\omega)}]_{r-1} [N^p_{r-1} + \langle K\langle k\rangle\rangle] \qquad (7)$$

$$N^h_{r-1} = G_{r-1} N^h_1 \qquad\qquad N^p_{r-1} = G_{r-1} N_1 + P_{r-1} \qquad (8)$$

これでわかるようにすべての分割区間における固有マトリクスが最初の分割区間の固有マトリクスで表現されるので最初と最後の境界条件を一括りにすることにより、固有値と固有マトリクスを得る。

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_n G_n \end{bmatrix}^h N^h_1 = 0 \qquad (9) \qquad\qquad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_n G_n \end{bmatrix}^p N^p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_n(P_n + \langle K_n \rangle) \end{bmatrix} \qquad (10)$$

(9)における係数マトリクスの行列式で固有値 ω が求まったとき、N_1 未定係数の1つを Ω とおき、各未定係数と Ω の比を定めることが出来るので

$$N_1 = P_{(\omega)}\, \Omega_n \qquad (11)$$

となり、これら Ω_n を初期値問題で処理する。(3)に見られる変位をSine Fourier級数であらわせば各項の係数は変位に $\sin m\pi\bar{\rho}$ を掛けて、積分することにより定められる。$\bar{\rho} = c\rho + d$,
初期条件は、静止をもってあてれば、たわみもなく初期速度もゼロとする。

$$A\Omega = B \qquad (12)$$

この連立方程式により最後まで残った斉次解中の固有マトリクスが、すべて特定され、各断面における状態量が時間を追って知ることが出来る。

$$W(\bar{\rho}, t)_r = \sum_n [D R_{(1)} K G]_r \cdot P_{n(\omega)}\, \Omega_n e^{i\omega t} + [D R_{(1)} K_r [G_r N_1 + P_{r-1} + \langle K_0 \rangle]] \sin pt \qquad (13)$$

この方法では細分割する所に意義があり、分割要素内では一様断面としている。分割数が多くなれば計算で得られる数値の信頼度（有効数値の値動きの範囲）が増すが、所要時間が増大する。細分割すると移行演算の回数が増すが、それによる誤差(の大小)の累積は殆んど見られない。

集中質量マトリクスを示す。

$$K_{(k)} = E + \frac{Pa}{2\gamma AL} \begin{bmatrix} \cos\alpha k \sin\alpha k & \sin^2\alpha k & \sin\alpha k \cdot ch\alpha k & \sin\alpha k \cdot sh\alpha k \\ -\cos^2\alpha k & -\cos\alpha k \sin\alpha k & -\cos\alpha k \cdot ch\alpha k & -\cos\alpha k \cdot sh\alpha k \\ -\cos\alpha k\, sh\alpha k & -sh\alpha k \cdot \sin\alpha k & -sh\alpha k \cdot ch\alpha k & -sh^2\alpha k \\ \cos\alpha k \cdot ch\alpha k & ch\alpha k \cdot \sin\alpha k & ch^2\alpha k & ch\alpha k \cdot sh\alpha k \end{bmatrix} \qquad (14)$$

E: 単位マトリクス

集中荷重マトリクスを示す。

$$K_{(\beta k)} = \frac{QL^3}{2EI\beta^3} \begin{bmatrix} \sin\beta k \\ -\cos\beta k \\ -sh\beta k \\ ch\beta k \end{bmatrix} \qquad (15)$$

参考文献：谷本勉之助著 マトリクス構造解析
日刊工業新聞社発行