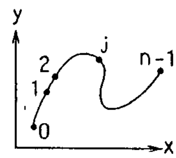
有限フーリェ級数による2次元境界要素法の内挿関数について

信州大学工学部　正会員　○草間　孝志
同　　上　正会員　大上　俊之

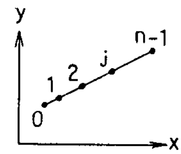
1．まえがき　複雑な形状の構造物を境界要素法を用いて解析する場合，境界形状をできるだけ忠実に表現することによって，解の精度の向上を図ることができる。その場合，内挿関数として有限フーリェ級数を用いれば，少ない節点数で所要の精度を得ることが期待できる。本報告では境界要素法に有限フーリェ級数を応用する方法について，数値計算例を用いてその有効性を検討する。

2．理論の概要　ある要素がnの節点j（j=0,1,2,・・・,n-1)を有するものとし，節点jの座標を（x_j，y_j)とする。

節点0と節点n－1とを結ぶ直線上における点jの座標を（$\bar{x}_j$，$\bar{y}_j$)とし，jを離散変数とすると



図－1 曲線要素



図－2 直線要素

$$\bar{x}_j=(1-\frac{j}{n-1})\,x_0+\frac{j}{n-1}x_{n-1},\qquad \bar{y}_j=(1-\frac{j}{n-1})\,y_0+\frac{j}{n-1}y_{n-1} \tag{1}$$

となる。ここで，

$$\xi_j=x_j-\bar{x}_j,\qquad \eta_j=y_j-\bar{y}_j \tag{2}$$

$$\xi_0=\xi_{n-1}=\eta_0=\eta_{n-1}=0 \tag{3}$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=(1-\frac{t}{n-1})\,x_0+\frac{t}{n-1}x_{n-1}+\xi(t)\\ y(t)&=(1-\frac{t}{n-1})\,y_0+\frac{t}{n-1}y_{n-1}+\eta(t)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

を得る。ここに，$\xi(t)$，$\eta(t)$ は，それぞれ離散値 ξ_j，η_j から得られる連続な近似式とする。

いま，近似式として有限フーリェ級数を用いると，ξ_j の有限フーリェ近似 $\xi(t)$（$\eta(t)$ についても同様）は，式(3)を考慮すると，nが偶数の場合

$$\xi(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n/2-1}\left[A_k\cdot\cos(\frac{2\pi kt}{n})+B_k\cdot\sin(\frac{2\pi kt}{n})\right]+\frac{A_{n/2}}{2}\cdot\cos(\pi t) \tag{5}$$

$$A_k=\frac{2}{n}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\cdot\cos(\frac{2\pi kj}{n}),\qquad B_k=\frac{2}{n}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\cdot\sin(\frac{2\pi kj}{n}) \tag{6}$$

となる。式(4)に式(5),(6)を代入し整理すると次式を得る。（実数tの範囲は　$0\leq t\leq n-1$）

$$x(t)=\{\phi\}^{T}\cdot\{x\},\qquad y(t)=\{\phi\}^{T}\cdot\{y\} \tag{7}$$

$$\{\phi\}=[\phi_0\ \phi_1\ \cdots\ \phi_{n-1}]^{T},\qquad \{x\}=[x_0\ x_1\ \cdots\ x_{n-1}]^{T},\qquad \{y\}\text{も同様} \tag{8}$$

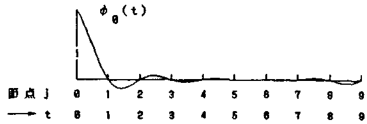
$$\phi_0=1-\sum_{j=1}^{n-1}\phi_j \quad (9) \qquad\qquad \phi_{n-1}=\frac{1}{n-1}(t-\sum_{j=1}^{n-2}j\,\phi_j) \quad (10)$$

nが偶数の場合　$\phi_j=\frac{1}{n}\left[(-1)^{j}\cdot\cos(\pi t)+\frac{\sin[(n-1)\zeta]}{\sin(\zeta)}\right]$　(j=1～n-2)　(11-A)

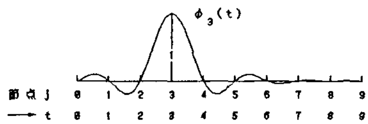
nが奇数の場合　$\phi_j=\frac{1}{n}\cdot\frac{\sin(n\zeta)}{\sin(\zeta)}$　(j=1～n-2)　(11-B)

ここに，$\zeta=\frac{\pi(t-j)}{n}$である。ϕ_jは$t=j$のとき$\phi_j=1$になり，j以外の他の節点では$\phi_j=0$になる。よってϕ_jは内挿関数の性質を備えている。

以上述べたように，この方法は節点0と節点n－1を結ぶ直線からの差を有限フーリェ近似したものである。座標(x_j, y_j)の値を直接有限フーリェ近似しなかった理由は，図－2に示すようなn個の節点を有する直線境界に対しても適用できる内挿関数を得るためである。式(10),(11)を図示すると図－3,4を得る。

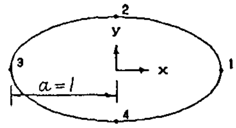


図－3 内挿関数ϕ_0 (n＝10)



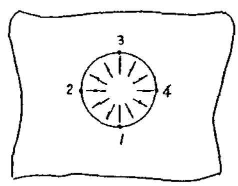
図－4 内挿関数ϕ_3 (n＝10)

境界が滑らかな閉曲線の場合，これを1つの要素と考えるときには，式(4)のtの1次式の項は不要である。その場合の内挿関数は$j=0\sim n-1$に対して，式(11-A)または式(11-B)が成り立つ。このとき実数tは$0\leq t\leq n$として計算すれば連続な閉曲線が得られる。これは周期がnの振動と考えることに相当する。



図－5 4節点による楕円

3．数値計算例　以上示した内挿関数を用いた結果が妥当であるか否かを検証するため，境界要素法に適用する前に，次の簡単な計算を行った。

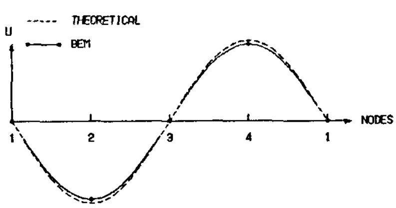


図－6 円孔を有する無限平板

図－5は(0,-0.5),(1,0),(0,0.5),(-1,0)の4点を通る閉曲線を内挿関数を用いて図示したものである。この場合，閉曲線は楕円となり，曲線長は境界をΓとすると

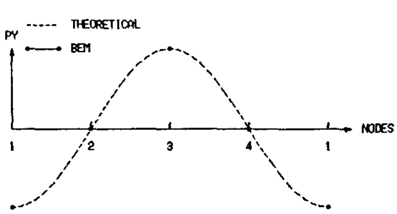
$$S=\int_\Gamma d\Gamma=\int_0^n |J|\,dt,\quad |J|=\text{ヤコビアン}$$

で与えられる。節点間に分点数4のガウスの積分公式を適用すると，S＝4.84446を得る。正解はE(k)を第2種完全楕円積分とすると$k^2=0.75$より，$S=4aE(k)=4.84426$となり，4個の節点を有する1つの要素としても，かなりよい精度で解が得られることがわかる。



図－7 境界上の水平変位

次に，円孔部に内圧をうける無限平板の境界要素法による解法に適用した。節点は図－6の4点で，これを1つの要素とした。与えた物理量は文献[2]と同じである。表面力と変位に対しても同じ内挿関数を用いると，この場合，解は8元の連立方程式を解くことによって得られる。計算結果を図－7，図－8に示す。



図－8 鉛直方向表面力

4．あとがき　簡単な例ではあったが，妥当性が検証された。境界形状を有限フーリェ級数で表現することにより，一種の高次要素とみなすことができるので，解の精度を高めることが期待できる。

5．参考文献　1)大上，三井，草間：境界要素法の移動境界問題への適用，境界要素法論文集，第2巻，1985．2)ブレビア．（神谷，田中，田中共訳）：境界要素法入門，培風館，1980．