# 曲線ばりの有限変形理論

福井高専　正員　前島正彦

1．はじめに　　曲線ばりの変形を，平面保持と断面形状不変の仮定を満たす主変形と，その仮定からのずれ・付加変形に分けることによって，直線ばりの場合と同様に[1]，有限変形を容易に表現できた．その変形に対して仮想変位の原理を使うことによって，断面力に対する厳密な有限変形つりあい方程式と，Kirchhoffの応力に対する線形のつりあい方程式が得られることを示す．

2．変形前の幾何形状　　変形前のはりの軸線の位置ベクトルを $\mathbf{r}_0(\xi_3)$ とする．$\xi_3$ はパラメタである．この軸線の単位法線，陪法線，接線を，$\mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{e}_3$ とする．また，この軸線の曲率，捩率を，$\kappa_0/s_0, \tau_0/s_0$ とする（$s_0^2=\dot{\mathbf{r}}_0\cdot\dot{\mathbf{r}}_0$，$(\dot{\ })$ は $\xi_3$ による微分を示す．）．はりの断面内に，法線から陪法線方向に角 $\theta$ の方向に $\xi_1$ 座標，その直角方向に $\xi_2$ 座標をとる．この方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ で表すと，Frenet-Serretの関係から次式が導かれる．

$$\dot{\mathbf{e}}_1=\varphi_3\mathbf{e}_2-\varphi_2\mathbf{e}_3,\quad \dot{\mathbf{e}}_2=\varphi_1\mathbf{e}_3-\varphi_3\mathbf{e}_1,\quad \dot{\mathbf{e}}_3=\varphi_2\mathbf{e}_1-\varphi_1\mathbf{e}_2 \tag{1}$$

$$\varphi_1=-\kappa_0\sin\theta,\quad \varphi_2=-\kappa_0\cos\theta,\quad \varphi_3=\tau_0+\dot{\theta} \tag{2}$$

断面内の任意の位置は，$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2$　(3)

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$ を曲線座標系と考えると，その共変基底，反変基底は次式となる．

$$g_1=\mathbf{e}_1,\ g_2=\mathbf{e}_2,\ g_3=-\xi_2\varphi_3\mathbf{e}_1+\xi_1\varphi_3\mathbf{e}_2+g_0\mathbf{e}_3,\ g^1=\mathbf{e}_1+a^1\mathbf{e}_3,\ g^2=\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_3$$

$$g^3=a^3\mathbf{e}_3,\ g_0=s_0+\xi_2\varphi_1-\xi_1\varphi_2,\ a^1=\xi_2\tau_0/g_0,\ a^2=-\xi_1\tau_0/g_0,\ a^3=1/g_0 \tag{4}$$

3．変形後の幾何形状　　変形後の軸線の位置を $\mathbf{R}_0$ とする．この軸線の法線・陪法線・接線を，$\mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_3$ とする．平面保持と断面形状不変の仮定が成立すると，もとの断面はもとの形で，$\mathbf{N}_0-\mathbf{B}_0$ 平面上にある．もとの $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ のこの面上での方向を $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ とすれば，変形後の位置ベクトル $\bar{\mathbf{R}}$ は，

$$\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{R}_0+\xi_1\mathbf{E}_1+\xi_2\mathbf{E}_2 \tag{3'}$$

$K_0/S_0, \Gamma_0/S_0$ を変形後の軸線の曲率，捩率（$S_0^2=\dot{\mathbf{R}}_0\cdot\dot{\mathbf{R}}_0$），$\Theta$ を $\mathbf{N}_0$ と $\mathbf{E}_1$ のなす角とすると，

$$\dot{\mathbf{E}}_1=\phi_3\mathbf{E}_2-\phi_2\mathbf{E}_3,\quad \dot{\mathbf{E}}_2=\phi_1\mathbf{E}_3-\phi_3\mathbf{E}_1,\quad \dot{\mathbf{E}}_3=\phi_2\mathbf{E}_1-\phi_1\mathbf{E}_2 \tag{1'}$$

$$\phi_1=-K_0\sin\Theta,\quad \phi_2=-K_0\cos\Theta,\quad \phi_3=\Gamma_0+\dot{\Theta} \tag{2'}$$

$$G_1=\mathbf{E}_1,\ G_2=\mathbf{E}_2,\ G_3=-\xi_2\phi_3\mathbf{E}_1+\xi_1\phi_3\mathbf{E}_2+G_0\mathbf{E}_3,\ G^1=\mathbf{E}_1+A^1\mathbf{E}_3,\ G^2=\mathbf{E}_2+A^2\mathbf{E}_3$$

$$G^3=A^3\mathbf{E}_3,\ G_0=S_0+\xi_2\phi_1-\xi_1\phi_2,\ A^1=\xi_2\Gamma_0/G_0,\ A^2=-\xi_1\Gamma_0/G_0,\ A^3=1/G_0 \tag{4'}$$

平面保持と断面形状不変の仮定が成立しないとき，その $\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2$ 面上の断面形状からのずれを，$\mathbf{u}=u_iG^i$ とする．これは主変形に対して微小変形とみなすことができる．変形後の完全な位置ベクトル $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_0+\xi_1\mathbf{E}_1+\xi_2\mathbf{E}_2+\mathbf{u}=\mathbf{R}_0+\xi_1G_1+\xi_2G_2+u_iG^i \tag{5}$$

4．ひずみテンソル

（5）式の変位から，Greenのひずみテンソルの成分 $\varepsilon_{ij}$ は付加変形 $\mathbf{u}$ を微小変形とすれば

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(G_{ij}+u_i|_j+u_j|_i-g_{ij}\right),\quad G_{ij}=G_i\cdot G_j,\quad g_{ij}=g_i\cdot g_j \tag{6}$$

（|）は共変微分を意味する．各成分を具体的に表示すると，

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}\,,\quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}\,,\quad \varepsilon_{12} = (u_{1,2} + u_{2,1})/2$$

$$\varepsilon_{31} = \{u_{3,1} + u_{1,3} - \xi_2(\phi_3 - \varphi_3)\}/2 + \varphi_2 a^i u_i - u_2$$

$$\varepsilon_{23} = \{u_{2,3} + u_{3,2} + \xi_1(\phi_3 - \varphi_3)\}/2 - \varphi_1 a^i u_i - u_1 \qquad (7)$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} + \{(S_0 + \xi_2\phi_1 - \xi_1\phi_2)^2 - (s_0 + \xi_2\varphi_1 - \xi_1\varphi_2)^2 + (\phi_3^2 - \varphi_3^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}/2$$
$$+ g_0 \dot{a}^i u_i - g_{33}(a^3\varphi_2 u_1 - a^3\varphi_1 u_2) - a^3\varphi_3(\xi_2\varphi_2 + \xi_1\varphi_1)$$

5. つりあい方程式　　上述の変位とひずみテンソルに対して，Kirchhoffの応力テンソル$\sigma^{ij}$と変形後のはりに作用する物体力ベクトル$\boldsymbol{f}$，表面力ベクトル$\boldsymbol{P}$を考えると仮想仕事の原理が成立する．

$$\int_V \sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dV = \int_V \delta(\mathbb{R}_0 + \xi_1\mathbb{G}_1 + \xi_2\mathbb{G}_2 + u_i\mathbb{G}^i)\cdot\boldsymbol{f}\,dV + \int_S \delta(\mathbb{R}_0 + \xi_1\mathbb{G}_1 + \xi_2\mathbb{G}_2 + u_i\mathbb{G}_i)\cdot\boldsymbol{P}\,dS$$

$\varepsilon_{ij}$は変形後の幾何形状を示す量，$S_0$，$\phi_i$を含むが，この変分は主変形ベクトルに具体的な表示を与えなくても簡単に計算できる．$S_0^2 = \dot{\mathbb{R}}_0\cdot\dot{\mathbb{R}}_0$から，$\delta S_0 = \mathbb{E}_3\cdot\delta\dot{\mathbb{R}}_0$，$\delta\mathbb{E}_3 = \{\delta\dot{\mathbb{R}}_0 - (\mathbb{E}_3\cdot\delta\dot{\mathbb{R}}_0)\mathbb{E}_3\}/S_0$

また，$\phi_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\dot{\mathbb{E}}_j\cdot\mathbb{E}_k$であり，$\Omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta\mathbb{E}_j\cdot\mathbb{E}_k$を定義すると，$\delta\mathbb{E}_i = \epsilon_{ijk}\mathbb{E}_j\Omega_k$である．$\epsilon_{ijk}$はEddingtonの$\epsilon$である．これから，

$$\delta\phi_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\delta\dot{\mathbb{E}}_j\cdot\mathbb{E}_k + \dot{\mathbb{E}}_j\cdot\delta\mathbb{E}_k) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\{(\epsilon_{jmn}\dot{\mathbb{E}}_m\Omega_n + \epsilon_{jmn}\mathbb{E}_m\dot{\Omega}_n)\cdot\mathbb{E}_k$$
$$+ \dot{\mathbb{E}}_j\cdot\epsilon_{kmn}\mathbb{E}_k\Omega_k\} = \dot{\Omega}_i + \epsilon_{ijk}\phi_j\Omega_k \qquad (8)$$

また，$\Omega_1 = -\mathbb{E}_2\cdot\delta\dot{\mathbb{R}}_0/S_0$，$\Omega_2 = \mathbb{E}_1\cdot\delta\dot{\mathbb{R}}_0/S_0$である．仮想仕事の式を，$\delta\mathbb{R}_0$，$\Omega_3$，$\delta u_i$について整理すると，次のつりあい方程式が得られる．

$$\dot{Q}^1 - \phi_3 Q^2 + \phi_2 Q^3 + P^1 - (m^2/S_0)_{,3} - (m^1/S_0)\phi_3 = 0$$

$$\dot{Q}^2 - \phi_1 Q^3 + \phi_3 Q^1 + P^2 + (m^1/S_0)_{,3} - (m^2/S_0)\phi_3 = 0$$

$$\dot{Q}^3 - \phi_2 Q^1 + \phi_1 Q^2 + P^3 + (m^1\phi_1 + m^2\phi_2)/S_0^2 = 0 \qquad (9)$$

$$\dot{M}_2 - \phi_1 M^3 + \phi_3 M^1 + S_0 Q^1 = 0\,,\quad \dot{M}_1 - \phi_3 M_2 + \phi_2 M_3 - S_0 Q^2 = 0$$

$$\dot{M}_3 - \phi_2 M^1 + \phi_1 M^2 + m_3 = 0$$

$$M^1 = \int \xi_2\sigma^{33} g_0 G_0\,d\xi_1\,d\xi_2\,,\quad M^2 = -\int \xi_1\sigma^{33} g_0 G_0\,d\xi^1 d\xi^2\,,\quad M^3 = \int(\xi_1\sigma^{31} - \xi_2\sigma^{23} + r_p^2\phi_3\sigma^{33}) g_0\,d\xi_1 d\xi_2$$

$$Q^3 = \int \sigma^{33} g_0 G_0\,d\xi_1\,d\xi_2\,,\quad P^i = \oint \boldsymbol{P}\cdot\mathbb{E}_i h_0\,dt + \int \boldsymbol{f}\cdot\mathbb{E}_i g_0\,d\xi_1\,d\xi_2$$

$$m^1 = \oint \xi_2 \boldsymbol{P}\cdot\mathbb{E}_3 h_0/S_0\,dt + \int \xi_2 \boldsymbol{f}\cdot\mathbb{E}_3 g_0/S_0\,d\xi_1\,d\xi_2$$

$$m^2 = -\oint \xi_1 \boldsymbol{P}\cdot\mathbb{E}_3 h_0/S_0\,dt - \int \xi_1 \boldsymbol{f}\cdot\mathbb{E}_3 g_0/S_0\,d\xi_1\,d\xi_2$$

$$m^3 = \oint(\xi_1 \boldsymbol{P}\cdot\mathbb{E}_2 - \xi_2 \boldsymbol{P}\cdot\mathbb{E}_1)h_0\,dt + \int(\xi_1 \boldsymbol{f}\cdot\mathbb{E}_2 - \xi_2 \boldsymbol{f}\cdot\mathbb{E}_1) g_0\,d\xi_1\,d\xi_2$$

ただし，$t$は断面の周を表わすパラメタ，$h_0 = \sqrt{\{(\xi_1')^2 + (\xi_2')^2\}g_{33} - (-\xi_2\xi_1' + \xi_1\xi_2')^2\varphi_3^2}$であり，$(')$は，$t$による微分を示す．

応力テンソルに対するつりあい方程式は，$\sigma^{ij}\|_j + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}_i = 0$で，具体的に示せば

$$\sigma^{1j}{}_{,j} - (g_0\dot{a}^1 + a^3\varphi_2 g_{33})(\sigma^{11} + \sigma^{33}) - (g_0\dot{a}^2 + a^3\varphi_1 g_{33})\sigma^{12}$$
$$- (g_0\dot{a}^3 + 2a^1\varphi_2)\sigma^{13} + 2(\varphi^3 + a^1\varphi_1)\sigma^{23} + f^1 = 0$$

$$\sigma^{2j}{}_{,j} - (g_0\dot{a}^1 - a^3\varphi_2 g_{33})\sigma^{21} - (g_0\dot{a}^2 + a^3\varphi_1 g_{33})(\sigma_{22} + \sigma_{33})$$
$$+ 2(\varphi_3 - a^2\varphi_2)\sigma^{31} - (g_0\dot{a}^3 - 2a^2\varphi_1)\sigma^{23} + f^2 = 0 \qquad (10)$$

$$\sigma^{3j}{}_{,j} - (g_0\dot{a}^1 + 2a^3\varphi_2 - a^3\varphi_2 g_{33})\sigma^{31} - (g_0\dot{a}^2 - 2a^3\varphi_1 + a^3\varphi_1 g_{33})\sigma^{23}$$
$$+ 2a^3\dot{g}_0\,\sigma^{33} + f^3 = 0$$

参考文献 1）前島・佐々木　直線梁の有限変形理論　福井高専研究紀要第9号（1975年）