平面円弧ばりの有限変位問題における楕円積分解

名古屋工業大学　学生員　○藤本知行
名古屋工業大学　正　員　　後藤芳顯
名古屋工業大学　正　員　　松浦　聖

1．まえがき

平面棒材の有限変位理論における一般的な支配方程式はすでに報告され[1]ており、その中で直線棒材に関する軸線の伸張変形を考慮した一般解が積分表示で得られることも示されている。また、それらの解の楕円積分の標準形への変換と、その数値計算も行われている[2]。

本報告では、円弧ばりの有限変位理論における厳密解という意味で、積分表示された一般解を示すとともに、楕円積分の標準形への変換が直線棒材で用いた方法を拡張することによって容易に求めることができることを示し、さらに若干の数値計算例も示す。

2．解の積分表示

Table.1 は、文献(3)で示された支配方程式を Fig.1 の物理量を用いて y－z 軸に変換した形で示しており、ここでは分布荷重は省略してある。これらの支配方程式を文献(1)の方法で積分すると、Table.2 に示す無次元量を用いた積分表示による一般解を得ることができる。ここで示した積分表示と直線棒材の積分表示による一般解[2]との違いは、関数 f のモーメントの項に初期曲率が含まれている点と、積分範囲である回転角に初期の回転角が含まれた形になっている点である。これらは Table.2 の $1/r_0$ にあたる初期曲率を無限に小さくすることによって初期の回転角 α_0 も 0 に近づき直線棒材の一般解と一致する。なおこの積分表示による一般解を誘導する際に初期曲率を一定としている。

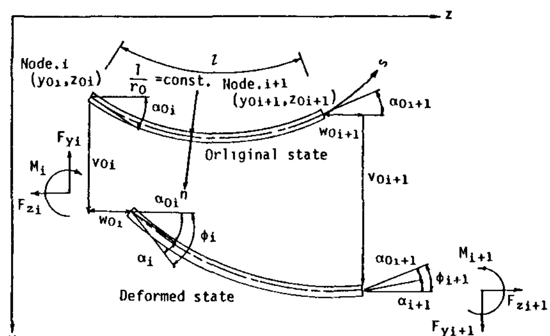


Fig.1　Physical Quantities

Table.1　Direct Langrangain Expressions

Equilibrium Equaions	Boundary conditions	
	Mechanical	Geometrical
$-(F_n\sin\alpha_0)'+(F_s\cos\alpha_0)'=0$ $(F_s\sin\alpha_0)'+(F_n\cos\alpha_0)'=0$	$-F_n\sin\alpha_0+F_s\cos\alpha_0=\bar{F}_z$ $F_s\sin\alpha+F_n\cos\alpha_0=\bar{F}_y$ $M=\bar{M}$	$v_0=\bar{V}_0\cos\alpha_0-\bar{W}_0\sin\alpha_0$ $w_0=\bar{W}_0\cos\alpha_0+\bar{V}_0\sin\alpha_0$ $\alpha=\bar{\alpha}$
Theories	F_n , F_s	Stress Resultants vs. Displacements
Finite Displacements with Finite Strains	$F_n=N\cdot\sin\alpha+\frac{M'}{\sqrt{g_0}}\cos\alpha$ $F_s=N\cdot\cos\alpha-\frac{M'}{\sqrt{g_0}}\sin\alpha$	$N=EA(\sqrt{g_0}-1)$ $M=-EI\alpha'$
Finite Displacements with finite Strains	$F_n=N\cdot\sin\alpha+M'\cos\alpha$ $F_s=N\cdot\cos\alpha-M'\sin\alpha$	$N=EA(\sqrt{g_0}-1)$ $M=-EI\alpha'$
Inextensional Finite Displacements	$F_n=N\cdot\sin\alpha+M'\cos\alpha$ $F_s=N\cdot\cos\alpha-M'\sin\alpha$	$\sqrt{g_0}=1$ $M=-EI\alpha'$

Remarks; The following notations are used throughout Tables.
E;Young's Modulus, A;Cross Sectional Area, r_0;Radius of Curvature of Centroidal Axis, N;Axial Stress Resultant, $\alpha_0'=-1/r_0$
$g_0=(v_0'-w_0/r_0)^2+(1+v_0/r_0+w_0')^2$, $'=d/ds$

3．楕円積分標準形への変換

Table.2 から明らかなように、各理論の積分表示された解は、いずれも次に示す積分から構成されている。

$$I_1=\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} -\mathrm{sign}(M+1/r_0)/f\cdot d\phi$$

$$I_2=\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} -\mathrm{sign}(M+1/r_0)\cdot\sin\phi/f\cdot d\phi$$

$$I_3=\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} -\mathrm{sign}(M+1/r_0)\cdot\cos\phi/f\cdot d\phi$$

$$I_4=\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} -\mathrm{sign}(M+1/r_0)\cdot\sin^2\phi/f\cdot d\phi$$

$$I_5=\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}}-\mathrm{sign}(M+1/r_0)\cdot\sin\phi\cos\phi/f\cdot d\phi$$

(1. a～e)

$$f=(a_0+a_1\cos\phi+a_2\sin\phi+a_3\sin\phi\cos\phi+a_4\cos^2\phi+a_5\sin^2\phi)^{1/2}$$

(2)

ここでa_0～a_5は無次元量を表した定数である。

これらは、文献(2)で行った変換と同様な変換により、楕円積分の標準形へ変換でき、標準形に関するシンボリックな表現を用いると、次のように表わされる。

ひずみに制限をつけない有限変位の式では

$I_1\to F$, $I_2\to F+\Pi+G$, $I_3\to F+\Pi+G$, $I_4\to F+E+\Pi+G$, $I_5\to F+E+\Pi+G$ (3. a～e)

微小ひずみ・有限変位の式では

$I_1\to F$, $I_2\to G$, $I_3\to F+E$, $I_4\to G$, $I_5\to F+E+G$ (4. a～e)

ここで、F,E,Πはおのおの第1種, 第2種, 第3種の楕円積分の標準形を表わし、Gは初等関数の積分を表している。なお、軸線不伸張の有限変位の式では(4.e,f)式が現われない。

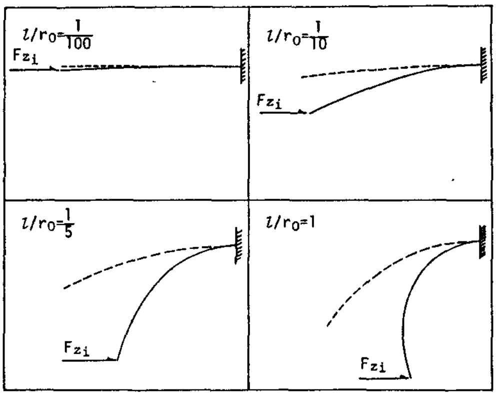
Table.2 Integral for the Solutions of Governing Equations in Table.1

$$l=\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}}\frac{1}{f}\,d\phi \qquad \frac{w_{0_{i+1}}+z_{0_{i+1}}}{l}=\frac{w_{0_i}+z_{0_i}}{l}+\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}}\frac{K_w\,c}{f}\,d\phi \qquad \frac{v_{0_{i+1}}+y_{0_{i+1}}}{l}=\frac{v_{0_i}+y_{0_i}}{l}+\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}}\frac{K_v\,s}{f}\,d\phi$$

$$A_{i+1}=A_i-\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}}\frac{K_m}{f}(B_i s-C_i c)\,d\phi \qquad B_{i+1}=B_i \qquad C_{i+1}=C_i$$

Theories	Finite Displacements with Finite Strains	Finite Displacements with Small Strains	Inextensional Finite Displacements
f	$-\mathrm{sign}(M+l/r_0)((A_i+l/r_0)^2-2B_i(c-c_i)-2C_i(s-s_i)-\frac{B_iC_i}{\lambda^2}(s2-s2_i)-\frac{B_i^2-C_i^2}{2\lambda^2}(c2-c2_i))^{1/2}$	$-\mathrm{sign}(M+l/r_0)((A_i+l/r_0)^2-2B_i(c-c_i)-2C_i(s-s_i))^{1/2}$	$-\mathrm{sign}(M+l/r_0)((A_i+l/r_0)^2-2B_i(c-c_i)-2C_i(s-s_i))^{1/2}$
K_w K_v K_m	$K_w=K_v=K_m=\sqrt{g_0}$	$K_w=K_v=\sqrt{g_0}$ $K_m=1.0$	$K_w=K_v=K_m=1.0$

Remarks; $A_i=\frac{M_i l}{EI}$, $B_i=\frac{Fz_i l^2}{EI}$, $C_i=\frac{Fy_i l^2}{EI}$, λ=Slenderness Ration, $1/r_0$;Curvature of Curved Beam Element
$\phi=\alpha+\alpha_0$, $\phi_i=\alpha_i+\alpha_0$, $\phi_{i+1}=\alpha_{i+1}+\alpha_0$, $c=\cos\phi$, $s=\sin\phi$, $c_i=\cos\phi_i$, $s_i=\sin\phi_i$, $c2=\cos2\phi$, $s2=\sin2\phi$, $c2_i=\cos2\phi_i$, $s2_i=\sin2\phi_i$
l=Length of Curved Beam Element, sign( )=±1 according to the ± of ( ), $\sqrt{g_0}=1+(B_i\,c+C_i\,s)/\lambda^2$



Remarks; λ=100, Fz_i=20,000kg, I=4,720cm⁴, A=47.2cm²
E=2.1×10⁶kg/cm, l=1,000cm

Fig.2 Displacements of Circular Cantilever

4. 数値計算例

Fig.2では円弧ばりの初期曲率$\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, 1のそれぞれのときでz軸方向力だけを載荷したときの変形形状を示したものであり、Fig.3は初期曲率が異なる円弧片持ばりにz軸方向力だけを載荷したときの荷重－変位曲線である。これらの数値計算はすべて細長比λを100として計算したため各種支配方程式による差は見られなかった。

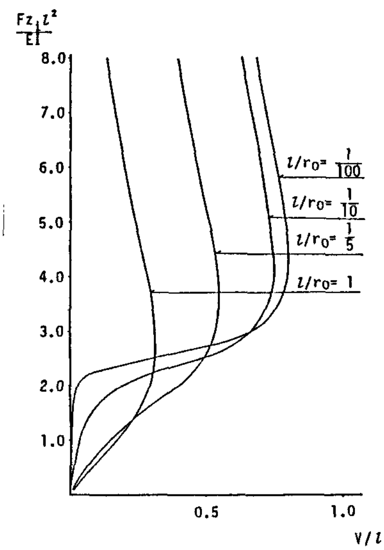


Fig.3 Load versus Vertical Deflection

＜参考文献＞

1) 西野・倉方・後藤；一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論 土木学会論文報告集第237号 1975

2) 山下・後藤・松浦；平面棒材の有限変位問題における楕円積分解 第40回土木学会学術講演会概要集I, 1985

3) GOTO, HASEGAWA, NISHINO; ACCURACY AND CONVERGENCE OF THE SEPARATION OF RIGID BODY DISPLACEMENTS FOR PLANE CURVED FRAMES PROC. OF JSCE No.344 April 1984