Gaussの誤差式の誘導法（Hagen法）について

愛知工業大学　正会員　根橋直人

1. はしがき

Gaussの誤差曲線式は次のとおりである。

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}\cdots\cdots\cdots(1)$$

［ここに　y＝誤差xの起る確率，h＝観測の精度指数］

これを元にして，最小自乗法が導かれ，測量や物理実験等の測定値の誤差の処理に重要な貢献をなし来つたことは周知である。上式の誘導法については，古くから多くの学者の解が示され，（例えばPeason, Laplace等[1]），中でもGauss自身の解は，多くの著書に散見され一般に知られているが，筆者が一著書[2]で見当ったHagen法に興味を惹かれたので紹介する次第である。同時に関連する確率の諸定理についても解説し，この方面に関心を持たれる方々の御参考に資したい。

2. Hagen法

その前にGaussの方法で使われる確率の定理について言及する。即ち一連の誤差x_1，x_2，…… x_nが各独立で，その生起する確率が夫々p_1，p_2，…… p_nであるとき，これらが同時に起る確率Pは　$P=p_1p_2\cdots p_n\cdots\cdots(2)$　となる。これが確率の乗法定理であり，（注2］参照），以下Pを最大ならしめる場合が最確値であるとする考えを進めて（1）式が導かれている。

さて本題のHagen法は，あらゆる誤差は微小な誤差原子（Elementary Error）の代数和から成立つとし，各誤差原子は独立で，絶対値等しく，正・負の発生率が等しいとおく。今誤差原子をΔx，その個数をmとしたとき，

i）m個すべてが正の場合；

誤差の大きさ＝$+m\Delta x$，　発生率＝$\left(\frac{1}{2}\right)^m$

ii）$(m-1)$個が正で，ただ1個が負の場合；

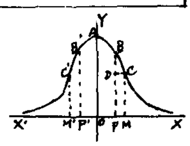
誤差の大きさ＝$(m-2)\Delta x$　　発生率＝$m\left(\frac{1}{2}\right)^m$

以下順次すべての場合について計算すると発生率の値は，$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^m$を二項定理により展開した各項の値に等しいことを知る。之を二項分布と云う。発生率の算出は「確率の反覆試行の定理」による。（注2］参照）。以上を下表にまとめる。

表－1

Δxの個数 正	負	誤差の大きさ（x）	発生率（y）
m	0	$m\Delta x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^m$
$m-1$	1	$(m-2)\Delta x$	$m\left(\frac{1}{2}\right)^m$
$m-2$	2	$(m-4)\Delta x$	$\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$
⋮	⋮	⋮	⋮
$m-n$	n	$(m-2n)\Delta x$	$\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$
$m-n-1$	$n+1$	$(m-2n-2)\Delta x$	$\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$
⋮	⋮	⋮	

図－1において，確率曲線$y=f(x)$の微分方程式は$\frac{BD}{CD}$の極限＝$\frac{y-y'}{x-x'}$の極限＝$\frac{dy}{dx}$を求めることであり，之を積分すれば求める方程式が得られる。



図－1　確率曲線

今上表においてxとx'を相隣る誤差とし，$x=(m-2n)\Delta x$，$x'=(m-2n-2)\Delta x\cdots\cdots(3)$ とおく。各の確率yとy'の比は

$$\frac{y'}{y}=\frac{m-n}{n+1}\qquad\therefore\frac{y-y'}{y}=\frac{1-m+2n}{n+1}\cdots\cdots(4)$$

（3）より　$m-2n=\frac{x}{\Delta x}$，　$\therefore n=\frac{m\Delta x-x}{2\Delta x}\cdots\cdots(5)$

（5）を（4）に代入　$\frac{y-y'}{y}=\frac{1-m+\frac{m\Delta x-x}{\Delta x}}{\frac{m\Delta x-x}{2\Delta x}+1}=\frac{2(\Delta x-x)}{(m+2)\Delta x-x}$

$$\therefore y-y'=y\frac{2(\Delta x-x)}{(m+2)\Delta x-x}\cdots\cdots\cdots(6)$$

ここで（6）を見るに，分子のΔxはxに比し微小だから消去し，分母の2はmに比し微小だから之も消去し，更に$m\Delta x$は誤差原子の正の極大値のときの誤差の大きさだから，之に比しxは微小だから之も消去する。従って（6）式は

$$y-y'=\frac{-2xy}{m\Delta x}$$ となる。

(3)より　$x-x'=2\Delta x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{-2xy}{m\Delta x}\Big/2\Delta x=\frac{-xy}{m(\Delta x)^2}$$

ここで $\frac{1}{m(\Delta x)^2}=2h^2$ とおけば

$$\frac{dy}{dx}=-2h^2xy \qquad \therefore \frac{dy}{y}=-2h^2x\,dx$$

之を積分すれば　$\log y=-h^2x^2+\log C$（Cは積分常数）

$$\therefore y=Ce^{-h^2x^2}$$

ここに常数 $C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ は別途求められるから（証明略），　$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$

となり，求める（1）式が得られた。

以上がHagen法であるが，これに類似した解も2,3見受けられる。[3),4)]

3.　上記解法に付随する「確率の諸定理」について.

注1]「乗法定理」……$E_1, E_2 \cdots E_n$を各独立した事象とし，その確率を夫々 $p_1, p_2 \cdots p_n$ とおけば これらの事象がすべて起る確率は $p_1p_2\cdots p_n$ である。

例）1つのサイコロを2回投げるとき，始めに1の目が出て，後に3の目が出る確率は，$1/6\times1/6=1/36$，又1個の貨幣を3回投げて，3回共表の出る確率は $1/2\times1/2\times1/2=1/8$ である。

証明）今簡単のため E_1, E_2の2つの事象について考える。E_1はm回のうちa回起り，E_2はn回のうちb回起ったとする。各の確率をp_1, p_2とすれば $p_1=\frac{a}{m}$，$p_2=\frac{b}{n}$ となり，E_1, E_2がすべて起る確率は，2個の事象の組合せ即ち$(m\times n)$回のうちの$(a\times b)$回起ることである．故にその確率をPとすれば　$P=\frac{ab}{mn}$ となる。従って $p_1\times p_2=a/m\times b/n=ab/mn=P$ となる。

注2]「反覆試行の定理」……1つのサイコロをn回投げるとき，各回共1の目が出る確率は，各$1/6$である。即ち毎回1の目が出ることは互いに独立である．その場合丁度r回だけ1の目が出る確率は ${}_nC_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}$である。

証明）n回サイコロを投げ，最初から第r回まで1の目が出て，残り$(n-r)$回は1の目が出ない場合の数は，組合せの法則により ${}_nC_r$個である。これら ${}_nC_r$個の場合は互に排反するから，求める確率は加法定理（注3]参照）により$\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}$が${}_nC_r$回加え合わされたものである。即ちその確率は${}_nC_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}$である．之を二項分布と云い，$\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^n$を二項定理により展開した式

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n+{}_nC_{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)+{}_nC_{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

の各項が，n回の試行中丁度n回，$(n-1)$回…起る確率を表わす．この定理が前記表－1の発生率の算出に用いられたものである。

注3]「加法定理」……$E_1, E_2 \cdots E_n$が互いに排反する事象であるとき，夫々の確率を$p_1, p_2 \cdots p_n$とするとき，これらの事象の何れかが起る確率は$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n$である。

例）サイコロ2個を投げるとき，各が3の目が出る確率は夫々$1/6$である．これらの事象は排反するから，2つ共3の目が出る確率は$1/6+1/6=1/3$である。

証明）1個のサイコロを投げるならすべての場合は6通りであり，2個のサイコロを投げるなら12通りである。之は1個のサイコロを12回連続投げたと考えてよい．今すべてでn回のうち，第1のサイコロで都合よい回数をa_1回，第2のサイコロで同じくa_2回とすると，1つの事象に対して都合よい場合と，他の事象に対して都合よい場合とには共通の場合が無いから，3の目が2個のサイコロの何れかに起る事象に対し都合のよい場合とは(a_1+a_2)回である。故にその確率をpとすると

$$p=\frac{a_1+a_2}{n}=p_1+p_2 \qquad \text{である。}$$

参考文献）
1)　船山良三著「誤差と最小自乗法概論」P.49　理工図書
2)　大森又吉著「最小自乗法応用 測量平均法」P.P 11〜16　恒星社厚生閣
3)　一瀬正巳著「誤差論」P.P. 14〜16　培風館
4)　数学セミナー・リーディングス 1979「数学セミナー増刊 確率・統計＋近似・誤差」P.P.100〜101　日本評論社