スペクトル分析手法による交通特性の予測

信州大学工学部　正　員　奥谷　巌
信州大学工学部　学生員○杉山　信太郎

1．はじめに

われわれは、交通特性の動的予測手法として、予測対象リンク外のリンク情報をも活用する手法である、カルマンフィルター、最小二乗法を用いるモデル等について種々の考察を加えてきた。今回は、それらと比較を行うという意味で、予測対象リンクのみの情報を活用する手法である、スペクトル分析を用いたモデル[1]について検討を加えることにする。

2．Karhunen-Loève展開

ある関数列$\varphi_n(t)$が区間$(-T/2, T/2)$において下式のような直交性を持ち、かつ完全性を有するとき、

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n(t)\cdot\varphi_m(t)\,dt = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases} \tag{1}$$

この条件の下において任意の関数$x(t)$は、下式のような級数に展開し得ることが知られている。

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\varphi_n(t) \qquad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \tag{2}$$

この展開はKarhunen-Loeve展開と呼ばれるもので、フーリエ級数による確率過程の表現

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n\, e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = 2\pi/T \tag{3}$$

を、より一般的にしたものである。このK-L展開における係数b_nが下記のような直交性を有するとき

$$E\{\,b_n\cdot b_m\,\} = 0 \qquad n\neq m \tag{4}$$

関数$\varphi_n(t)$は、ある値λ_nに対して下式のような積分方程式を満す。

$$\int_{-T/2}^{T/2} R(t_1,t_2)\,\varphi(t_2)\,dt = \lambda\,\varphi(t_1) \qquad -T/2 < t_1 < T/2 \tag{5}$$

この場合、式中の$R(t_1,t_2)$，λは、それぞれ下式を満たすものでなくてはならない。

$$R(t_1,t_2) = E\{x(t_1), x(t_2)\} \quad (6) \quad , \quad \lambda_n = E\{|b_n|^2\} \tag{7}$$

3．交通特性に対する適応

前節において述べた確率関数$x(t)$を交通特性$x(t)$と置き換え以下，使用することにする。そこで、第m日のk時点における交通特性を$x_m(k)$とし、下式のような展開式を置いてみる。

$$x_m(k) = \sum_{i=1}^{K} c_{mi}\,\phi_i(k) + e_m(k) \qquad (m=1,2,\cdots,M\ ,\ k=1,2,\cdots,N) \tag{8}$$

この式において，$e_m(k)$は展開において発生する誤差，c_{mi}は$\phi_i(k)$に対する係数，$\phi_i(k)$は以下のような性質を有する関数である。

$$\sum_{k=1}^{N} \phi_j(k)\,\phi_i(k) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots,k \\ j=1,2,\cdots,k \end{pmatrix} \tag{9}$$

以上の仮定により，(8)式は前節のK-L展開の式を離散的なデータに用い、かつ実際のデータに適応するために誤差項を加えたものであることが理解されよう。本稿の目的は、この誤差項の最小化を図ることにある。さてこの(9)式をベクトル式化すると以下のようになる。

$$\mathbb{X} = \mathbb{C}\,\Phi^{T} + \mathbb{E} \tag{10}$$

ここで上式のエラーベクトルに注目をし，上式を変形することによりエラーノルムを作ることができる、従って誤差項の最小化の問題はエラーノルムJの最小化問題に置き換え得る。

$$\mathbb{J} = (\mathbb{X} - \mathbb{C}\Phi^T)(\mathbb{X} - \mathbb{C}\Phi^T)^T$$

そこで、$\mathbb{J}=0$と置き、そのような条件の下にあるΦと$\mathbb{C}$について個別に計算をしておく

$$\mathbb{X} - \mathbb{C}\Phi^T = 0 \quad \text{より} \qquad \Phi^T = (\mathbb{C}^T\mathbb{C})^{-1}\mathbb{C}^T\mathbb{X} \tag{11}$$

$$\mathbb{X} - \mathbb{C}\Phi^T = 0 \quad \text{より} \qquad \mathbb{C} = \mathbb{X}\Phi \tag{12}$$

ここで、$\mathbb{C}$についてさらに、$\mathbb{C}\mathbb{C}^T = \mathrm{dig}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$と、直交性を仮定し、かつデータ$\mathbb{X}$の相関々数行列を$\mathbb{R}$とするならば、下式はK-L展開より導き出された積分方程式(5)に対応することになる。

$$\mathbb{R}\Phi = \Phi\Lambda \qquad (\Lambda = \mathrm{dig}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)) \tag{13}$$

この場合、マトリックスΦは、λ_iの各値を個有値とした相関マトリックス$\mathbb{R}$の個有マトリックスになることは明らかであり、この事実を利用してΦの各要素やΛの各要素を計算し得るのである。

4. 誤差の最小値

ここでは誤差の値としてエラーマトリックス$\mathbb{E}$の各要素の二乗和を利用する、従って式を利用することにより、誤差の値は下式より得られる。

$$I = \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\left(X_m(k) - \sum_{i=1}^{K} C_{mi}\cdot\phi_i(k)\right)^2 = \mathrm{trace}\,\mathbb{J} \tag{14}$$

この式に最小化の要素である(11)(12)式と$\phi_i(k)$の直交性を考慮して、二乗和の最小値を得る。

$$I = \mathrm{trace}(\mathbb{X}\mathbb{X}^T - \mathbb{C}\mathbb{C}^T) = \mathrm{trace}\,\mathbb{R} - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = \sum_{i=k+1}^{N}\lambda_i \tag{15}$$

この(15)式により次のことが導れる。展開に際しての誤差をより小さくするには、より多くの数の個有値をマトリックスΦを求めるのに用い、かつ同じ数の個有値λ_iを使用するにしても、より大きな個有値を使用すべきである。こうして求めたマトリックスΦはこの不規則過程を十分な精度で展開し得るものであるから、このΦを用いることによりこの過程の予測も可能となるのである。

5. 予測に対する適応と具体的手法

以下、$K=5$の場合を例にとり具体的に予測に至る経過を記していくことにする。まず相関マトリックス$\mathbb{R}$を求め、それより固有マトリックスΦと個有値λ_iを求める。この場合、必要なる個有値の数は5程度であることが経験的に確かめられている。いま(13)式に具体的要素を入れてみると

$$\begin{bmatrix}\phi_1(1),\phi_2(1),\cdots,\phi_5(1)\\ \phi_1(N)\,\phi_2(N),\cdots,\phi_5(N)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_{11}\,R_{12}\cdots R_{1N}\\ R_{51}\,R_{52}\cdots R_{5N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1(1),\phi_2(1),\cdots,\phi_5(1)\\ \phi_1(N),\phi_2(N),\cdots,\phi_5(N)\end{bmatrix} \tag{16}$$

(16)式より、バイセクション法を用い大きい順に5つの個有値と、それに対応する個有ベクトルを算出しΛとΦを求める。以上により第M日までのデータを用い第M+1日の予測を行うわけであるが、まず、その日の過程を特徴づける係数行列$\mathbb{C}$を求める、そのためにはその日のデータのうち$X_{M+1}(1) \sim X_{M+1}(N')$が既知であるものとする。しからば(11)式を用いて、

$$[C_{M+1,1}, C_{M+1,2}, \cdots, C_{M+1,5}] = [X_{M+1}(1), \cdots X_{M+1}(N')]\begin{bmatrix}\phi_1(1),\phi_2(1),\cdots,\phi_5(1)\\ \phi_1(N'),\phi_2(N'),\cdots,\phi_5(N')\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\phi_1(1),\phi_1(2),\cdots,\phi_1(N')\\ \phi_5(1),\phi_5(2),\cdots,\phi_5(N')\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1(1),\phi_2(1),\cdots,\phi_5(1)\\ \phi_1(N'),\phi_2(N'),\cdots,\phi_5(N')\end{bmatrix}\right\} \tag{17}$$

こうして得られた係数行列$\mathbb{C}$を用い、(12)式より、M+1日のN'+1〜N時点の交通特性を予測するのである。

$$\{X_{M+1}(N'+1), X_{M+1}(N'+2), \cdots, X_{M+1}(N)\} = [C_{M+1,1}, C_{M+1,2}, \cdots, C_{M+1,5}]\begin{bmatrix}\phi_1(N'+1),\cdots,\phi_1(N)\\ \phi_5(N'+1),\cdots,\phi_5(N)\end{bmatrix} \tag{18}$$

なお、結果については、当日発表するものとする。

[参考文献] 1) H. Nicholson and C.D. Swann, "The Prediction of Traffic Flows Volumes Based on Spectral Analysis", Trans. Res. Vol 8 p533–538 (1974)