

交通流の安定性について

信州大学工学部 正員 奥谷 巖
信州大学工学部 〇学生員 永春彰信

1. はじめに

本研究は、高次交通流モデルを基礎にポテンシャルの構造を導出し、カタストロフィーの概念の導入により、交通流の安定性の一側面について基礎的な観点から分析を行う。

2. 高次交通流モデルとポテンシャルの展開

まず最初に、Ilya Prigogine と Robert Herman による速度分布の変化を規定する運動方程式

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int} \quad (1)$$

を用い、フィリップスの実験式への適用を考えた。

(1)式において、 f はある時間 t において、ある距離 x から $x+dx$ 間における速度 u をもつ速度分布関数とし、 $f(x, u, t)$ と定義する。

また右辺の項 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel}$ は、希望速度に近づこうとする項であり、 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}$ は、追い越し又は追従に伴う速度変化の項である。

(1)式はさらに

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{f-f_0}{T} + (1-P)P(\bar{u}-u)f \quad (2)$$

と表わせる。なおここで、 f_0 : 希望速度分布関数
 T : 緩和時間, P : 追越し確率, ρ : 交通密度
 u : 速度, $\bar{u}$: 空間平均速度と定義する。

上式(2)に速度 u をかけて積分すると、

$$\begin{aligned} a &= \int u \frac{df}{dt} du = \frac{d}{dt} \int u f du = \frac{d(\rho \bar{u})}{dt} = \rho \frac{d\bar{u}}{dt} \\ b &= -\frac{1}{T} \left\{ \int u f du + \int u f_0 du \right\} + P(1-P) \int u (\bar{u}-u) f du \\ &= -\frac{1}{T} [\rho \bar{u} - \rho \bar{u}_0] + \bar{u} P^2 (1-P) \bar{u} - P^2 (1-P) \bar{u}^2 \end{aligned}$$

となり、従って

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{\bar{u}-\bar{u}_0}{T} + P(1-P)[(\bar{u}^2)-\bar{u}^2] \quad (3)$$

なお、 $\bar{u}_0$: 希望速度と定義する。

(3)式は、時間 t に対して定常性を仮すため

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + T(1-P)P[(\bar{u}^2)-\bar{u}^2] \quad (4)$$

となる。ここで、フィリップスが与えている均衡状態における $\rho[(\bar{u}^2)-\bar{u}^2]$ を求める実験式

$$\rho_e(\bar{u}) = \frac{\rho \bar{u}^2 (\sigma^2 + 1.5 \bar{u}_0^2 \zeta^3)}{\bar{u}_0^2 (1 + 1.8 \zeta^3)} \quad (5)$$

を(4)に代入する。なお、 σ : 希望速度の標準偏差

$\zeta = \frac{\rho}{\beta - \rho}$ (β : 飽和交通密度) と定義し、さらに
 $T = \frac{\zeta(1-P)}{P}$ ($\beta \zeta = 0.328 \text{ sec/m}$), $P = 1 - \frac{\rho}{\beta} = 1 - \eta$ ($\frac{\rho}{\beta} = \eta$) で置換して整理すると

$$\bar{u}(\bar{u}_0^2(1-\eta)\{(1-\eta)^3 + 1.8\eta^3\} - (\bar{u}_0^2(1-\eta)\{(1-\eta)^3 + 1.8\eta^3\} + \zeta \beta (\bar{u}_0^2 \eta^3 \{\sigma^2(1-\eta)^3 + 0.15(\bar{u}_0^2 \eta^3)\}) = 0 \quad (6)$$

さらに流量の定義より、 $q = \rho \bar{u}$ を式(6)に代入し η の4次以上の項を無視すると

$$\begin{aligned} &8(\bar{u}_0^2) - \{48(\bar{u}_0^2) + (\bar{u}_0^2)\beta\}\eta + \{68(\bar{u}_0^2) + 4(\bar{u}_0^2)\beta + \zeta \beta \sigma^2\}\eta^2 \\ &- \{2.28(\bar{u}_0^2) + 6(\bar{u}_0^2)\beta + 3\zeta \beta \sigma^2\}\eta^3 = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

上式(7)の η の4次以上の項を $\alpha_0 \sim \alpha_3$ とおきかえ

$$\alpha_0 + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 \eta^3 = 0 \quad (8)$$

とし、さらに

$$\eta = \left(\frac{1}{\alpha_3}\right)^{\frac{1}{3}} x - \frac{\alpha_2}{3\alpha_3} \quad (9)$$

とおき、 $\alpha_0 \sim \alpha_3$ と x の関係式をつくると

$$X^3 + WX + V = 0 \quad (10)$$

ただし $W = \left\{ \alpha_0 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{3\alpha_3} + \frac{2\alpha_2^2}{27\alpha_3^2} \right\}$, $V = \left\{ \alpha_0 \left(\frac{1}{\alpha_3}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} \left(\frac{1}{\alpha_3}\right)^{\frac{1}{3}} \right\}$

$$\quad (12)$$

(10)式は、仮想的なポテンシャル F を

$$F = \frac{X^4}{4} + \frac{W}{2} X^2 + VX \quad (13)$$

としたとき、その極値を与える形となる。

これは、Rene' Thom が示した初等カタストロフィーと呼ばれる7つの基本的形態のうちの一つ (CUSP) に対応するものである。

又、式(5)のかわりに、フィリップスが導いた平衡状態における平均速度の実験式を用い、先に述べた(7)式と同様の計算過程をへることにし

$$8\bar{u}_0^2 - (78\bar{u}_0^2 + \bar{u}_0^2 \beta)\eta + (218\bar{u}_0^2 + 7\bar{u}_0^2 \beta)\eta^2$$

$-(358u_1^7 + 21u_0u_1^6 - 9.08(0.01u_1^3u_0^2))v^2 = 0 \quad (14)$ となり、カタストロフィーの概念を議論するこ
 ができる。なお u_0 は二車間の追い越し速度定数。
 3. カタストロフィー理論による安定性につい
 ての定理のポテンシャル F によるカタスト
 ロフィー写像

$$\Sigma_F: M_F \rightarrow R^K \quad (K \text{ はコントロール変数の数})$$

において、先に述べた、 W, V がポテンシャル F
 のコントロール変数にあたり、 X との関係は下図
 に示すとおりである。

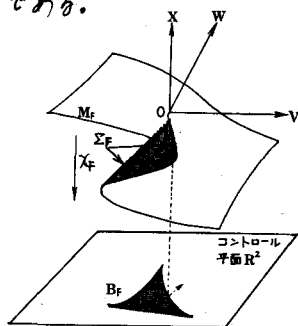


図1-1

図(1-1)で $\varphi: R^2 \rightarrow M_F$ は R^2 より M_F へのディフェ
 オモルフィズムであり、 R^2 と M_F は互いにディフェ
 オモルフィックである。すなわち、 M_F は R^2 に滑ら
 かに変形したものであり、 R^2 と M_F は微分トポ
 ロジーでは同じ図形である

さてここで、 M_F 上の平衡点 (W, V, X) は、ポテンシ
 ャル $F(W, V, X)$ の極小値を与えるとき安定平衡に
 なり、 $(W, V, X) \in M_F$ が安定平衡点となる条件は

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(W, V, X) > 0 \quad (15)$$

であり、安定平衡点の集合 G_F を安定平衡空間と呼
 ぶ。いま、 G_F の集合 Σ_F を考えてみると Σ_F は、図に
 示したように M_F の折り目の線になる。又、 $W=V$
 $=X=0$ 、この原点 $O=(0,0,0)$ は M_F のくさびの
 点という。

この M_F 上の折り目の線上の点 P における X_F のヤコ
 ビアンが 0 となる点を特異点といい、これはすなわ
 ち、 M_F の折り目の線 Σ_F が、カタストロフィー写
 像 Σ_F の特異点の集合となるのである。

さらに R^2 の点 P は、その逆像 $\Sigma_F^{-1}(P)$ に少なくとも一
 つの特異点があるとき Σ_F の特異値といい、この Σ_F
 の特異値の集合を $B_F \subset R^2$ とし、カタストロフィー
 写像 Σ_F の分岐集合といい

$$B_F = \{(W, V) | 4W^3 + 27V^2 = 0\} \subset R^2$$

になる。

この分岐集合を、コントロール平面 R^2 に描き、そ
 の線上や内外にコントロールの点があるときのポ
 テンシャル F の極形を描き、その点での極小値、
 つまり安定平衡点を求める。

カタストロフィーは、この安定平衡点の消滅や発
 生によって起こるので、これらの個数が変化する
 境界線である分岐集合は、カタストロフィー発生
 の数値という重要な役割を果たす。

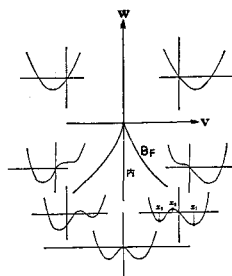


図1-2

以上の理論を用いて、式(7)と式(15)において、コ
 ントロール変数を (ρ, u) におき、その分岐集合を
 求め、カタストロフィーが起きるときの交通密度
 ρ を求める

従来、交通容量に対応する交通密度近辺の交通状
 態は、非常に不安定であるといわれており、ほと
 んどしき原因によって、非渋滞領域から渋滞領
 域へと急激に変化するこが指摘されているが、
 こうした現象を本研究で示したカタストロフィー
 の概念の導入により理論的に説明できる可能性が
 ある。

なお、結果については当日発表する。

参考文献) kinetic Theory of Vehicular Traffic, by Ilya Prigogine
 and Robert Herman, カタストロフィー, by 野口弘。