IV－2

土地利用の均衡分析に関する一考察

信州大学　正　員　　奥谷　巌
信州大学　学生員　○若林　斜

1．まえがき

我々は、都市における土地利用と地価構造に対する同時均衡問題を数理計画問題として定式化し、土地利用状態と地価との関係を説明する数学的モデルの構築を試みてきた[1),2)]。本論文では、地価に依存する立地需要関数を考え、それを組み入れた非対称な土地利用均衡問題について、不等式体系を基礎とした解の存在について理論的な考察を行なう。立地需要関数の導入により地価に対する弾力的な立地需要を考慮することができるので、より現実的な土地利用パターンの変化過程の解明が可能になる。

2．土地利用均衡問題の定式化[3)]

ゾーンの土地利用状態$(\mathbf{x},\mathbf{g})$が、集合$\mathcal{K}$に属しているならば、それは適していると言える。ここで、$\mathcal{K}=\{(\mathbf{x},\mathbf{g})\mid \mathbf{x}\geq 0,\ \mathbf{g}\geq 0\}$であり、適したゾーンの土地利用状態の集合$\mathcal{K}$は閉凸集合である。

もし、利用者が土地利用選択を変える何らの理由を持たないならば、ゾーンの土地利用状態$(\mathbf{x},\mathbf{g})\in\mathcal{K}$は均衡状態にある。この状態は、次式を成立するような均衡条件によって説明される。

$$x_p^i>0 \text{ のとき}\quad U_p^i(\bar{\mathbf{x}})-\bar{g}_p=0 \tag{1}$$

$$x_p^i=0 \text{ のとき}\quad U_p^i(\bar{\mathbf{x}})-\bar{g}_p\leq 0 \tag{2}$$

式(1)，(2)は、均衡状態の定義の数学的表現であり、あるゾーンにおいて立地するアクティビティーの効用は皆等しく、立地しないアクティビティーの効用よりも大きいことを示している。また、ゾーンにおける立地需要量は、そのゾーンにおける各アクティビティーの立地量の総和に等しいとすると、次式を得る。

$$\sum_{i=1}^{n} x_p^i=d_p(\bar{\mathbf{g}}) \tag{3}$$

均衡条件(1),(2),(3)を不等式体系として表すと、

$$\sum_p\sum_i[U_p^i(\bar{\mathbf{x}})-\bar{g}_p][x_p^i-\bar{x}_p^i]+\sum_p\Big[\sum_i\bar{x}_p^i-d_p(\bar{\mathbf{g}})\Big][g_p-\bar{g}_p]\leq 0,\ (\mathbf{x},\mathbf{g})\in\mathcal{K} \tag{4}$$

また、式(4)をベクトル表示すると

$$\varphi(\bar{\mathbb{X}})^{T}(\mathbb{X}-\bar{\mathbb{X}})\leq 0,\ \mathbb{X}\in\mathcal{K} \tag{5}$$

ただし、$\mathbb{X}=(\mathbf{x},\mathbf{g})$と定義されるベクトルであり、$\varphi(\mathbb{X})=(\mathbb{U}(\mathbf{x})-\mathbb{G},\ \sum_i \mathbf{x}^i-\mathbf{d}(\mathbf{g}))$である。ここで、

$U_p^i(\mathbf{x})$：ゾーンpにおけるアクティビティーiの効用関数

$\mathbb{U}_p(\mathbf{x})=(U_p^1(\mathbf{x}),U_p^2(\mathbf{x}),\cdots\cdots,U_p^n(\mathbf{x}))$

$\mathbb{U}(\mathbf{x})=(\mathbb{U}_1(\mathbf{x}),\mathbb{U}_2(\mathbf{x}),\cdots\cdots,\mathbb{U}_m(\mathbf{x}))$

g_p：ゾーンpにおける地価

$\mathbb{G}_p=(g_p,g_p,\cdots\cdots,g_p)$：n次元ベクトル

$\mathbb{G}=(\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2,\cdots\cdots,\mathbb{G}_m)$

$\mathbf{g}=(g_1,g_2,\cdots\cdots,g_m)$

x_p^i：ゾーンpにおけるアクティビティーiの立地量

$\sum_i \mathbf{x}^i=(\sum_i x_1^i,\sum_i x_2^i,\cdots\cdots,\sum_i x_m^i)$

$d_p(\mathbf{g})$：ゾーンpにおける立地需要量

$\mathbf{d}(\mathbf{g})=(d_1(\mathbf{g}),d_2(\mathbf{g}),\cdots\cdots,d_m(\mathbf{g}))$

3．立地需要関数を考慮に入れた均衡問題に対する若干の考察[4)]

2．で示した立地需要関数を組み入れた均衡問題において、均衡状態の唯一性を満たす条件は、効用関数と立地需要関数の単調性である。しかし、立地需要関数は地価だけではなく、立地条件や立地嗜好等も含んだ関数と考えられ、その性質上単調関数ではないと考えられる。同様に、効用関数も一般に単調関数であるとは言えない。それ故、均衡状態の唯一性を言うことは出来ない。このことは、実際の都市の発展方向が初期の状態によって幾通りもあることを考えれば、当然であると思

われる。

次に、均衡状態の存在について考察するが、その条件は単調性の仮定を必要としない。効用関数が非負の連続関数であり、立地需要関数が上に有界な連続関数であるとすれば、*Brouwer* の不動点定理を用い均衡点が存在することを証明できる。

いま、式(4)を次のような関係式に変形し、それが均衡点を持つことを証明する。

$$\left.\begin{aligned} & x_p^i\left[U_p^i(x) - g_p\right] = 0 \\ & g_p\left[\sum_i^n x_p^i - d_p(g)\right] = 0 \\ & U_p^i(x) - g_p \le 0 \\ & \sum_i^n x_p^i - d_p(g) \le 0 \\ & x_p^i \ge 0 \\ & g_p \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$K_1 > 0$ は、$K_1 > \max_p \max_{g \ge 0} d_p(g)$ (7)

$K_2 \ge K_1$ は、$K_2 > \max_{i,p} \max_{0 \le x \le K_1 e_1} U_p^i(x)$ (8)

を満足している。K_1, K_2 は仮定より存在することがわかる。ここで、e_1, e_2 は、ゾーン p とアクティビィティー i の成分をもつ単位ベクトルとする。

連続写像 ϕ は、すべての i, p において

$$\phi_p^i(x, g) = \min\left\{K_1, \left[x_p^i - g_p + U_p^i(x)\right]^+\right\} \quad (9)$$

$$\phi_p(x, g) = \min\left\{K_2, \left[g_p - d_p(g) + \sum_i^n x_p^i\right]^+\right\} \quad (10)$$

によるそれ自身の中 $\{0 \le x \le K_1 e_1,\ 0 \le g \le K_2 e_2\}$ への写像とする。Brouwer の不動点定理によって、

$$\hat{x}_p^i = \phi_p^i(\hat{x}, \hat{g}) \quad (11)$$

$$\hat{g}_p = \phi_p(\hat{x}, \hat{g}) \quad (12)$$

なる不動点 $(\hat{x}, \hat{g})$ が存在する。次に、我々は不動点 $(\hat{x}, \hat{g})$ が均衡解であることを、

$$\hat{x}_p^i = \left[\hat{x}_p^i - \hat{g}_p + U_p^i(\hat{x})\right]^+ \quad (13)$$

$$\hat{g}_p = \left[\hat{g}_p - d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i\right]^+ \quad (14)$$

を示すことによって証明する。

まず、$\hat{g}_p < K_2$ を示す。もし $\hat{g}_p = K_2$ とすると、K_2 の定義より $\hat{x}_p^i - \hat{g}_p + U_p^i(\hat{x}) < \hat{x}_p^i$ である。式(11)より $\hat{x}_p^i - \hat{g}_p + U_p^i(\hat{x}) < \phi_p^i(\hat{x}, \hat{g})$ が成立する。よって、式(9)から $\hat{x}_p^i = 0$ となる。これより $\hat{g}_p - d_p(\hat{x}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i \le \hat{g}_p$ であるが、式(12)から $\hat{g}_p - d_p(\hat{x}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i \le \phi_p(\hat{x}, \hat{g})$ となり、上と同じように示すと $\hat{g}_p = 0$ となる。これは仮定 $\hat{g}_p = K_2$ に矛盾する。よって、$\hat{g}_p < K_2$ である。即ち式(10)より $\hat{g}_p = \phi_p(\hat{x}, \hat{g}) = \left[\hat{g}_p - d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i\right]^+$ である。

次に、もし $\hat{x}_p^i = K_1$ とすると、K_1 の定義より $d_p(\hat{g}) < K_1$ だから $d_p(\hat{g}) \le \sum_i^n \hat{x}_p^i$。よって、$-d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i > 0$ となる。これより $\hat{g}_p - d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i > \hat{g}_p$ であるから、式(12)より $\hat{g}_p = K_2$ となる。しかし、これは既に証明した $\hat{g}_p < K_2$ に矛盾する。よって、$\hat{x}_p^i < K_1$ である。即ち式(9)より $\hat{x}_p^i = \phi_p^i(\hat{x}, \hat{g}) = \left[\hat{x}_p^i - \hat{g}_p + U_p^i(x)\right]^+$ でなければならない。

いま、式(14)において $\hat{g}_p - d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i \le 0$ のとき、$\hat{g}_p = 0$ であるから $-d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i \le 0$ となり

$$\hat{g}_p = 0 \text{ のとき} \quad -d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i \le 0 \quad (15)$$

さらに、$\hat{g}_p - d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i > 0$ のとき、$\hat{g}_p = \hat{g}_p - d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i$ であるから $-d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i = 0$ となり

$$\hat{g}_p \ge 0 \text{ のとき} \quad -d_p(\hat{g}) + \sum_i^n \hat{x}_p^i = 0 \quad (16)$$

式(13)においても同様にして

$$\hat{x}_p^i = 0 \text{ のとき} \quad U_p^i(\hat{x}) - \hat{g}_p \le 0 \quad (17)$$

$$\hat{x}_p^i \ge 0 \text{ のとき} \quad U_p^i(\hat{x}) - \hat{g}_p = 0 \quad (18)$$

となる。式(15)〜式(18)は、均衡状態の不等式体系(4)を表わしている。ゆえに、不動点 $(\hat{x}, \hat{g})$ が均衡解であることが証明された。

4．あとがき

本論文では、立地需要関数を導入することによってより現実的なモデルの構築を試みてきたが、安定性と感度については、今後さらに検討を行ない、より柔軟性のあるモデルとしていく予定である。

《参考文献》

1) 奥谷，朴，仲保；第15回日本道路会議一般論文集 PP 843〜844 (S58)

2) 奥谷，朴；土木学会中部支部研究発表会講演概要集 PP242〜243 (S59)

3) S.C.Dafermos , A.Naguraney, "Stability and Sensitivity Analysis for the General Network Equilibrium-Travel Choice Model" ,Ninth International Symposium on Transportation and Traffic Theory (1984)

4) H.Z.Aashtiani , L.Magnanti (1981) "Equilibrium on a congest-ed transportation network", SIAM J. Algebraic and Discrete Method 2