

ソリトンスペクトル理論の適用限界に関する研究

岐阜大学工学部 正会員 安田孝志

岐阜大学工学部 ○学生会員 上田英俊

1. 緒言 力学的厳密性と表示上の簡便性を併せ持つソリトンスペクトル理論は、Korteweg-de Vries 方程式の漸近多ソリトン解に基づく非線形不規則波理論であり、広範な海象下の海岸波浪に対して優れた表示精度を有している。しかしながら、この理論の適用限界が明示されていないため、その適用において若干混乱を与えていることも事実である。ここでは、この理論の適用限界を厳密解との比較によって検討し、許容誤差との関係によってその限界の明示を試みる。

2. 量子化されたソリトンによる規則波の表示 ソリトンはクノイド波の周期を無限大にした極限状態の波であり、数学的厳密性の下で規則波のソリトンモード表示を行うことは不可能となる。しかしながら、ソリトン間隔が一定値以上あれば、通常の力学現象を扱うレベルではソリトンは直交性を持つと見なすことが出来る。図-1は、このことをクノイド波の第1および第3次近似解

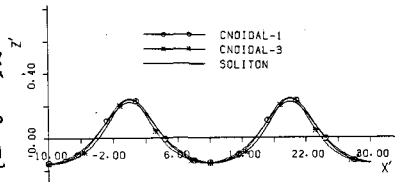


図-1 クノイド波とソリトンの波形に関する比較

による  $U_r = 25$  の場合の波形との比較によって示したものであり、近似精度に関係なくクノイド波が直交性を持つソリトンの連なりとして表示されていることがわかる。図-2は、クノイド波の第1および第3次近似解の波形とソリトンの波形との差の二乗和  $\sigma$  と  $U_r$  数との関係を示したものであり、 $U_r$  数が増すに従って  $\sigma$  が一様に減少していることがわかる。また、図-3は、波速について同様な比較を示したものであり、 $U_r \geq 25$  ではソリトンの波速とクノイド波の波速はほぼ一致しており、 $U_r = 25$  程度が通常の力学現象のレベルでのソリトンスペクトル理論の規則波への適用限界と判断される。しかしながら、この結果を KdV 方程式の多ソリトン解と整合させ、クノイド波のソリトンモード表示を理論的に可能とするには、固有値の量子化が必須となる。いま、ソリトンの固有値を  $\Delta A$  の間隔で量子化し、 $A$  および  $A + \Delta A$  の固有値を持つ2ケのソリトンの最小接近間隔  $D_{\min}$  を  $U_r$  数によって与えれば、量子化間隔  $\Delta A$  は次式によって決定される。

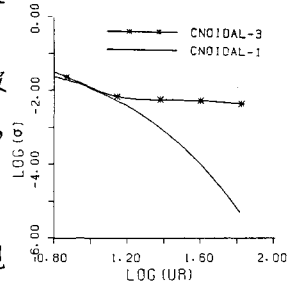


図-2 クノイド波のソリトン表示誤差と  $U_r$  数の関係

$$\sqrt{U_r} = -(\sqrt{3}/6) \left\{ (1 + \sqrt{1 + \Delta A/A}) / (\sqrt{1 + \Delta A/A}) \right\} \times \log \left\{ (\sqrt{1 + \Delta A/A} - 1) / (\sqrt{1 + \Delta A/A} + 1) \right\}^2 \quad (1)$$

$U_r = 25$  および  $40$  に対する  $\Delta A/A$  の値は、それぞれ  $5.11 \times 10^{-2}$  および  $1.65 \times 10^{-2}$  であり、量子化間隔としては前者は観測精度を考慮してもなお粗く、多ソリトン解との整合性を考慮するならば、 $U_r$  数  $= 40$  程度を規則波への適用限界とする必要があろう。

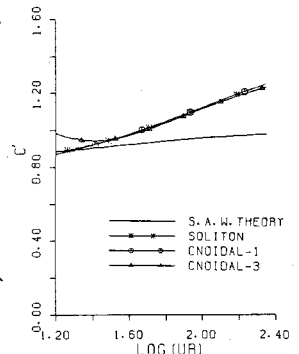


図-3 クノイド波とソリトンの波速に関する比較

3. ソリトンモードの直交限界および漸近限界 量子化されたソリトンは有限な波長を持ち、隣接

ソリトンとの波峰間隔がこの波長以上あれば、多ソリトン解は直交性を持つことになる。このような直交性を持つソリトンを不規則に連ねれば、いわば不規則クノイド波の表示を得ることが出来る。そこで、 $Ur=40$ をソリトンの直交限界指標とし、固有値 $A_i$ および $A_{i+1}$ のソリトンに関してその直交限界間隔 $\delta_i$ を次式によって定義する。

$$\delta_i = \sqrt{10} (A_i^{-1/2} + A_{i+1}^{-1/2}) = (\sqrt{30}/2)\mu \quad (2)$$

ここに、 $\mu$ はいわゆるソリトン幅パラメータである。これより、対象とする海岸波浪の波峰間隔 $\delta_i$ が $\delta_i$ よりも大きければ、各波峰成分を直交ソリトンとみなし、次式によってソリトンモード表示出来る。

$$\eta = \sum_{i=1}^N B_i \operatorname{sech}^2 \eta_i - \eta_0, \quad \eta_i = (\sqrt{3}B_i/2)(\chi^* - C_i z^* - \phi_i), \quad (3)$$

$$C_i = 1 + B_i/2 - 3\eta_0/2, \quad \eta_0 = \sum_{i=1}^N 4\sqrt{B_i}/3/T$$

ここに、 $B_i$ ; ソリトンの固有値、 $T$ ; 観測時間(観測区間)、 $N$ ;  $T$ に含まれるソリトン数、および $\phi_i$ ; ソリトンの位相を与える定数。

実際に海岸波浪を構成しているソリトンの多くは、 $\delta_i > \delta_i$ の関係を必ずしも満足しておらず、相互に干渉し合っているものと考えられるが、固有値に対して若干の誤差(許容誤差)を許せば、式(3)が十分な波形の表示精度を持つことは明らかにされている。そこで、厳密解の固有値 $A_i$ と式(3)に示した漸近解の固有値 $B_i$ の間に許容誤差 $\varepsilon_i$ を媒介として次式の関係があるものと仮定する。

$$B_i = A_i(1 - \varepsilon_i), \quad B_{i+1} = A_{i+1}(1 + \varepsilon_{i+1}), \quad A_i > A_{i+1} \quad (4)$$

このとき、波形はなお一致していることから、保存量  $\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx$  および  $\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx$  に着目することにより、このときのソリトン間隔 $\Delta_i$ と許容誤差 $\varepsilon_i$ の関係が次式のように導かれる。

$$\varepsilon_i = \sqrt{3}B_i \left\{ (B_{i+1}/B_i) / \{2(1 - B_{i+1}/B_i)\} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \eta_i \operatorname{sech}^2 \eta_{i+1} dx^*, \quad \eta_i = (\sqrt{3}B_i/2)\chi, \quad \eta_{i+1} = (\sqrt{3}B_{i+1}/2)(\chi - \Delta_i) \quad (5)$$

したがって、 $\delta_i < \delta_i$ であっても、 $\delta_i > \delta_i$ であれば、各ソリトンは直交性を失ってはいるが、許容誤差 $\varepsilon_i$ 内において厳密解に一致しており、式(3)の表示はなお力学的厳密性を有していることになる。図-4は、式(5)より求めた $\varepsilon_i$ と $\Delta_i$ の関係を、 $A_{i+1}/A_i$ をパラメータとして $A_i=0.6$ の場合について示したものである。これから、 $\varepsilon_i$ が3%以下では $\varepsilon_i$ の減少に伴って $\Delta_i$ は急激に増大するが、 $\varepsilon_i$ が3%を越えると $\Delta_i$ はほとんど変化せず、5%程度を許容誤差と定めることは十分に合理的であることがわかる。したがって、ソリトンスペクトル理論の適用限界は、式(5)を $\varepsilon_i=0.05$ の下で $\Delta_i$ によって与えられよう。

4. 現地波浪のソリトン間隔と直交、漸近および接近限界間隔との関係 図-5は、 $A_i=0.5$ および $\varepsilon_i=0.05$ としたときの各限界間隔と $A_{i+1}/A_i$ の関係に加え、大鵜海岸での観測波形(DN07)から求められたソリトン間隔 $\delta_i$ との比較を併せて示したものである。これから、このときの観測波の主要部は直交ソリトンの連なりと見ることが出来、漸近解表示が十分な精度を持っていることがわかる。

5. 結語 ソリトンスペクトル理論の許容誤差5%の場合の適用限界を示し、現地波浪との比較によってこの適用限界が十分に妥当なものであることを明らかにした。

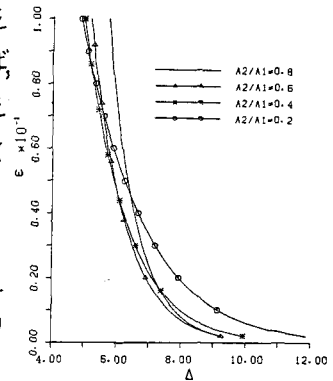


図-4 固有値の許容誤差と漸近限界間隔との関係

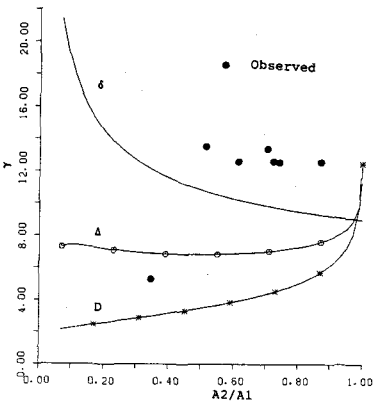


図-5 直交限界、漸近限界および接近限界の関係