自由表面積分方程式による水粒子速度の計算

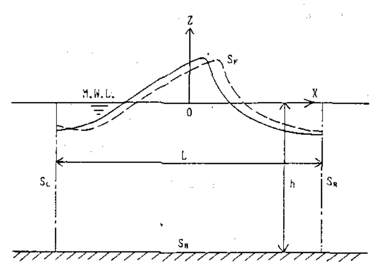
名古屋工業大学　正員○喜岡 渉　学生員 加藤俊夫　正員 石田 昭

1. はじめに

非線型波浪の水粒子速度を実験または数値解から求めた波形から計算する方法としてはDeanの流れ関数法やLambrakosのExtended Velocity Potential（E.X.V.P.）法[1)]があり，浅海波に対していくつかの適用例がある。しかしながら，流れ関数法は数個のフーリエ級数で波を代表させるものでありかつ波速とともに移動する座標系で定義されているため，砕波変形をともなうような強い非線型波浪の内部速度場の算定についてはその適用性に問題が残されているといえよう。また，EXVP法では移動座標系は用いていないものの基本的には流れ関数法と同様に数個のフーリエ級数で波を代表させるもので，時間・空間両波形にわたって繰り返し計算が必要となるため計算が煩雑である。本研究は，こうした問題点を持たない計算方法を自由表面積分方程式に基づいて検討するもので，その適用性について若干の検討を加えるものである。本方法によれば，計算条件として空間波形を与える必要があるが計算の手間は流れ関数法と同程度であると考えられ，重複波や局所的な空間的周期性を仮定しうるような不規則波群についても適用が可能である。

2. 計算方法

解析方法は著者の一人[2)]が砕波変形の数値シミュレーションに用いた方法を実験波形に適用できるように定式化したもので，グリーン公式に基づく積分方程式を用いるものである。座標系は図－1のようにとり，計算方法を簡略化するために解析にあたっては波の空間的周期性を仮定する。いま，時間tでの空間波形η^tと微小時間Δt前後の空間波形$\eta^{t-\Delta t}$，$\eta^{t+\Delta t}$がそれぞれ与えられたとする。η^tを一波長LにわたってN個に分割し各点x_i（$i=1\sim N$）でのη_i^t，$\eta_i^{t-\Delta t}$および$\eta_i^{t+\Delta t}$を読み取れば，自由表面上での運動学的境界条件により次式が成り立つ。



図－1. 座標系

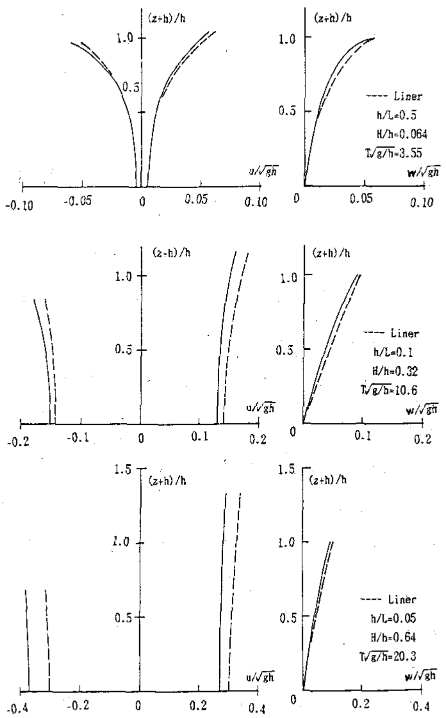
$$(\partial\phi/\partial n)_{x_i}^t = (n_y)_{x_i}^t\left[(\eta_{x_i}^{t+\Delta t}-\eta_{x_i}^{t-\Delta t})/(2\Delta t)\right] \qquad (1)$$

ただし，$\vec{n}$は外向法線ベクトルでn_yはそのy成分を示し，上式による誤差は$(\Delta t)^3$のオーダーである。ここで，流体境界上のsource点を$Q=(\xi,\zeta)$，計算点を$P=(x,z)$としてグリーン関数を式(2)で与えることにより，自由表面S_Fおよび両端の境界S_R，S_L上での積分方程式(3)を得ることができる。

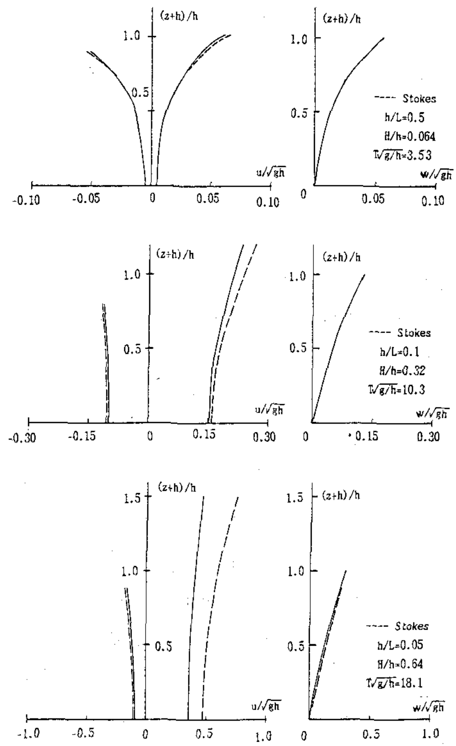
$$G(P,Q)=\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}+\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(z+2h+\zeta)^2} \qquad (2)$$

$$\alpha\phi(P)=\int_{S_F\cup S_R\cup S_L}\left[\phi(Q)\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)-G(P,Q)\frac{\partial}{\partial n}\phi(Q)\right]dS(Q) \qquad (3)$$

上式ではPも流体境界上の点で，αはP点での内角を示す。式(1)からS_Fでの$\partial\phi/\partial n$が与えられ，空間的周期性から$\phi(S_R)=\phi(S_L)$と$\partial\phi(S_R)/\partial n=-\partial\phi(S_L)/\partial n$の関係が成り立つ。したがって，両端境界上での分割数をN'とすれば$NT=N+N'$の節点で一次要素を用いて式(3)を離散化することにより，x_i点での速度ポテンシャルϕ_iと両端境界上でのϕ，$\partial\phi/\partial n$についてのNT元連立方程式を得る。波形の左右対称性が仮定できるときは式(3)は自由表面S_Fについてのみの積分方程式となる。一旦，



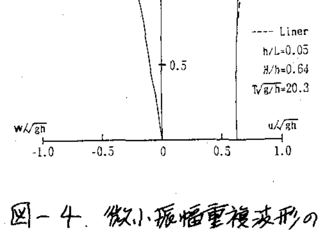
図－2. 微小振幅波形の水粒子速度



図－3. ストークス波形の水粒子速度

この連立方程式の解が求められれば，水粒子速度 u, w は次式を x, z について微分したものを用いることにより計算することができる。

$$\phi(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{S_F\cup S_R\cup S_L}\left[\phi(Q)\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)-G(P,Q)\frac{\partial}{\partial n}\phi(Q)\right]dS(Q) \quad \text{——(4)}$$



図－4. 微小振幅重複波形の水粒子速度

3. 適用例　図－2と図－3はそれぞれ微小振幅波，ストークス波の波形を与えてその最大水粒子速度を計算した結果を示したものである。計算には自由表面の分割数を $N=35$ とし，$\Delta t=0.015T$ とした。比水深が小さくなるほど計算結果と両理論値の差異は大きくなっているが，峰の位相での u についてはストークス波の理論値との差異の方が大きくなっている。図－4は同様に微小振幅重複波の水粒子速度をすべての点が平均水位にある位相について計算したもので，比水深が小さい場合についても両曲線は良く一致している。なお，砕波点付近の波についてその水粒子速度を本方法で計算し流れ関数法による結果と比較したがその結果については講演時に発表する。最後に，本研究は文部省科学研究費(自然災害U)，代表京大 岩垣雄一教授)の助成によったことを付記する。

参考文献 1) Lambrakos, K.F.: The extended velocity potential versus Stokes wave representation, J. Geophys. Res., Vol. 86, 1981. 2) Kioka, W.: Numerical analysis of breaking waves in a shallow water, Coastal Engineering in Japan, Vol. 26, 1983.