砂面の3次元不安定解析

金沢大学工学部　正　員　辻本　哲郎
金沢大学工学部　○学生員　福島　卓也

1．まえがき　中規模河床形態の形成機構として従来より3次元砂面不安定解析が行われているが，本研究ではむしろ小規模河床形態の3次元性に着目し，掃流砂運動に基づく砂面の不安定性を調べようとしたものである。以下，本研究の解析手法を説明する。

2．砂面不安定解析の仕組　不安定解析の枠組は2次元河床波の場合と変わらない。砂面擾乱を，式（1）とおき，その時間微分を，式（2）と等置することにより，式（3），（4）が得られ，砂面の不安定性の規準が位相差$\phi_{\dot z}$であることがわかる。$\phi_{\dot z}$が第1象限に属するとき下流へ進行する河床波が，第4象限に属するとき上流へ進行する河床波が形成される。すなわち，$\phi_{\dot z}$がどのように構成され，どのように決定されるかを明らかにすることがこの種の研究の本質である。

3．砂面不安定を産む流砂量の遅れ距離　Kennedyの研究より，流砂量の遅れが砂面不安定に強く貢献することが知られている。ここでは角波数を乗じ，遅れ距離も位相差として扱う。流下方向，横断方向の流砂量を，q_{B0}を非擾乱流砂量として，式（5），（6）と書くと，流砂の連続式は，式（7）（ρ_0；砂の空隙率）と書け，Ψ_{Bx}，Ψ_{By}を式（8），（9）のように表せる。Ψ_{Bx}，Ψ_{By}についてのこれらの表記を式（7）に代入して整理，式（2）と比較することより，式（10），（11），（12），（13）が得られる。但し，$\varepsilon_0\equiv l/\kappa$（流下方向の，河床波長と横断方向波長の比で，3次元性の指標となる），$\varepsilon_1\equiv r_{By}/r_{Bx}$である。2次元河床波では，$\varepsilon_0=\varepsilon_1=0$である。以上より，$r_{Bx}$，$\phi_{Bx}$；$r_{By}$，$\phi_{By}$を評価することが重要である。

4．縦断方向流砂量Ψ_{Bx}（x，y，t）の評価　2次元，3次元にかかわらず，流砂の非平衡性が，砂面不安定性の重要な要因の1つである。とくに流下方向流砂量の場所的変化はこれに強く支配されており，こうした場への適用を考え，Euler的に解釈された掃流砂のstochastic modelを採用する。いまpick-up rateの場所的分布を，式（14）とおく。これを，非平衡流砂量式（15）（A_2，A_3：砂の形状係数，$f_X(\xi)$：step lengthの確率密度関数）において，流砂の原点$x_0\to-\infty$，step lengthの分布を指数分布とおいたものに代入し，整理すると，式（16）が得れる。すなわち，流下方向流砂量のpick-up rateに対する遅れ距離δ_Bは式（17），（18），（19）のように決められる。なお，$\phi_{Bx}=\kappa\delta_B+\phi_p$である。

5．横断方向流砂量Ψ_{By}（x，y，t）の評価　流送土砂の運動方向をφとすると，q_{By}は式（20）であり，Ψ_{Bx}，$\tan\varphi$とも微少量ゆえ，式（21）と表される。但し，Φ（x，y，t）＝$\tan\varphi$でであり，これは3次元擾乱路床における横断勾配θ_2（$\Theta_2\equiv\tan\theta_2$）及び擾乱路床上流れの方向角$\gamma$（$\Gamma\equiv\tan\gamma$）の関数である。即ち，$\tan\varphi=\Phi(\Gamma,\Theta_2)$である。不安定解析では$\Gamma\fallingdotseq 0$，$\Theta_2\fallingdotseq 0$によって$\Phi\fallingdotseq 0$近傍を対象とするので式（22）と表される。ところでΦの特性を支配するのは，横断勾配，流れ方向の偏向のある場での

$$Z(x,y,t)=a\cdot\cos ly\cdot\sin\kappa(x-ct) \tag{1}$$

$$\partial Z/\partial t=r_{\dot z}\cdot\cos ly\cdot\sin\{\kappa(x-ct)-\phi_{\dot z}\} \tag{2}$$

$$\dot a/a=r_{\dot z}\cdot\cos\phi_{\dot z} \tag{3}$$

$$\kappa c=r_{\dot z}\cdot\sin\phi_{\dot z} \tag{4}$$

$$q_{Bx}(x,y,t)=q_{B0}\cdot\{1+\Psi_{Bx}(x,y,t)\} \tag{5}$$

$$q_{By}(x,y,t)=q_{B0}\cdot\{1+\Psi_{By}(x,y,t)\} \tag{6}$$

$$\partial Z/\partial t=\{-q_{B0}/(1-\rho_0)\}\cdot(\partial\Psi_{Bx}/\partial x+\partial\Psi_{By}/\partial y) \tag{7}$$

$$\Psi_{Bx}(x,y,t)=r_{Bx}\cdot a\cdot\cos ly\cdot\sin\{\kappa(x-ct)-\phi_{Bx}\} \tag{8}$$

$$\Psi_{By}(x,y,t)=r_{By}\cdot a\cdot\cos ly\cdot\sin\{\kappa(x-ct)-\phi_{By}\} \tag{9}$$

$$r_{\dot z}=\{\kappa q_{B0}/(1-\rho_0)\}\cdot R_0\cdot r_{Bx} \tag{10}$$

$$R_0^2=1+(\varepsilon_0\cdot\varepsilon_1)^2+2\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_1\cdot\sin(\phi_{Bx}-\phi_{By}) \tag{11}$$

$$\sin\phi_{\dot z}=(\cos\phi_{Bx}-\varepsilon_0\cdot\varepsilon_1\cdot\sin\phi_{By})/R_0 \tag{12}$$

$$\cos\phi_{\dot z}=-(\sin\phi_{Bx}+\varepsilon_0\cdot\varepsilon_1\cdot\cos\phi_{By})/R_0 \tag{13}$$

$$p_S=p_{S0}\cdot\{1+r_p\cdot a\cdot\cos ly\cdot\sin\{\kappa(x-ct)-\phi_p\}\} \tag{14}$$

$$q_B(x)=\frac{A_3 d}{A_2}\int_{x_0}^{x}p_S(\acute{x})\int_{x-x_0}^{\infty}f_X(\xi)\,d\xi\,d\acute{x} \tag{15}$$

$$\Psi_{Bx}(x,y,t)=[r_p/\{(\kappa\Lambda)^2+1\}]a\cdot\cos ly\,\{\sin\{\kappa(x-ct)-\phi_p\}-\kappa\Lambda\cdot\cos\{\kappa(x-ct)-\phi_p\}\} \tag{16}$$

$$\sin\kappa\delta_B=\kappa\Lambda/\sqrt{1+(\kappa\Lambda)^2} \tag{17}$$

$$\cos\kappa\delta_B=1/\sqrt{1+(\kappa\Lambda)^2} \tag{18}$$

$$r_{Bx}=r_p/\sqrt{1+(\kappa\Lambda)^2} \tag{19}$$

粒子の運動方程式であり，一般に時間項を有するが，平衡速度に達するまでの時間が短いことより，非定常項は無視する。まず，$\Gamma=0$ の場合，粒子の運動方程式は次のようである。x方向：式（23），y方向：式（24）（C_D：抗力係数，μ_f：摩擦係数，u_d：流速，u_g：粒子速度，σ/ρ：比重）。両式を連立させて整理すると式（25），（26）を得る（u_d/u_* は，例えば対数則流速分布を仮定すれば定まる）。式（25）において，{} 中の第2項は無視し得るので，$\Gamma\fallingdotseq 0$ では，$\Phi=\Theta_2/\sqrt[2]{\mu_f T_*}$ ，すなわち式（27）が得られる。次に $\Theta_2=0$，$\Gamma\neq 0$ の場合についても同様に砂粒運動についての運動方程式を検討すると，Φ（Γ，0）＝Γ，すなわち式（28）が得られる。すなわち式（29）となる。式（30），（31）を式（29）に代入し，Φ（x，y，t）＝Ψ_{By}（x，y，t）であること（式（21）より明らか）を考慮すると r_{By}，ϕ_{By} がそれぞれ式（32），（33），（34）のように定められる。ところで式（36）であるから $r_\theta=l$ である。

<u>6．pick-up rateの擾乱</u>　x方向の流砂量についての r_{Bx}，ϕ_{Bx} を知るには，pick-up rateの擾乱の挙動，r_p，ϕ_p を評価する必要がある。掃流力の擾乱を式（36），（37），pick-up rateのそれを式（38），（39）と書くと，$\phi_p=\phi_\tau$；式（40）が得られる（$p_{s*}\equiv p_s\cdot\sqrt[2]{d/(\sigma/\rho-1)g}$ ，$\tau\equiv\tau_*/\rho(\sigma/\rho-1)gd$ ）。p_{s*}，τ_* の関係式として中川らの提案した式（41）を用いると，式（42），但し $\eta\equiv\tau_*/\tau_{*c}$ となる。

<u>7．3次元擾乱路床上の流れ場</u>　式（1）で与えられるような3次元擾乱路床上の流れについては，いくつかの流れのモデルが考えられているが，ここではひとまずポテンシャル流モデルを適用する。すなわち，その速度ポテンシャル ϕ_0 は，式（43）で，水面波を式（44）とおくと，式（45）が得られる。主流方向の流速の摂動を考え式（46）とおくと，Uは式（47）で与えられるから，式（48）を得ることができる。但し F_* は式（49）である。また，流線の基本式は式（50）で，これより $\zeta=-h_0$ での流線が求められ，式（51）が得られる。なお，本章において，$\beta\equiv\sqrt[2]{\kappa^2+l^2}=\kappa\sqrt[2]{1+\varepsilon_0^2}$ である。なお，Ψ_u から Ψ_τ への変換については中川らの方法によった。

<u>8．あとがき</u>　以上のように3次元不安定を支配する各量の位相差がすべて解析的に評価された。これらを用いた総合的な結果は講演時に，2次元解析結果と比較して示す。

参考文献

Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: " SAND BED INSTABILITY DUE TO BED LOAD MOTION," Proc.ASCE,HY12,1980

林泰造：河川蛇行の成因についての研究，土木学会論文報告集，第180号，1970

$$q_{By}=q_{Bx}\cdot\tan\varphi=q_{B0}\cdot\{1+\Psi_{Bx}(x,y,t)\}\tan\varphi \tag{20}$$

$$q_{By}\simeq q_{B0}\cdot\Phi(x,y,t) \tag{21}$$

$$\Phi=\partial\Phi(\Gamma,0)/\partial\Gamma|_{\Gamma=0}\Gamma+\partial\Phi(0,\Theta_2)/\partial\Theta_2|_{\theta_2=0}\cdot\Theta_2 \tag{22}$$

$$\frac{\rho}{2}\cdot C_D\cdot A_2\cdot d^2\cdot\sqrt[2]{(u_d-u_g\cdot\cos\varphi)^2+(u_g\cdot\sin\varphi)^2}\cdot(u_d-u_g\cdot\cos\varphi) =\mu_f\cdot\rho\cdot A_3\cdot(\sigma/\rho-1)g\cdot d^3\cdot\cos\theta_2\cdot\sin\varphi \tag{23}$$

$$\frac{\rho}{2}\cdot C_D\cdot A_2\cdot d^2\cdot\sqrt[2]{(u_d-u_g\cdot\cos\varphi)^2+(u_g\cdot\sin\varphi)^2}\cdot u_g\cdot\sin\varphi =\rho\cdot A_3\cdot(\sigma/\rho-1)g\cdot d^3\cdot(\sin\theta_2-\mu_f\cdot\cos\theta_2\cdot\sin\varphi) \tag{24}$$

$$\Phi^4\cdot\{\mu_f^2+(\Theta_2-\mu_f\Phi)^2\}=\Theta_2^4/T_*^2 \tag{25}$$

$$T_*\equiv(C_d\ A_2/2A_3)\cdot(u_d/u_*)^2\cdot\tau_* \tag{26}$$

$$\partial\Phi(0,\Theta_2)/\partial\Theta_2|_{\theta=0}=1/\sqrt[2]{\mu_f T_*} \tag{27}$$

$$\partial\Phi(\Gamma,0)/\partial\Gamma|_{\Gamma=0}=1 \tag{28}$$

$$\Phi=\Theta_2/\sqrt[2]{\mu_f T_*}+\Gamma \tag{29}$$

$$\Theta_2=r_\theta\,a\cdot\sin ly\cdot\sin\kappa(x-ct) \tag{30}$$

$$\Gamma=r_\Gamma\cdot a\cdot\sin ly\cdot\sin\{\kappa(x-ct)-\phi_\Gamma\} \tag{31}$$

$$r_{By}=\{r_\theta/\sqrt[2]{\mu_f T_*}+r_\Gamma\cdot\cos\phi_\Gamma\}+r_\Gamma^2\cdot\sin^2\phi_\Gamma \tag{32}$$

$$\sin\phi_{By}=-r_\Gamma\cdot\sin\phi_\Gamma/r_{By} \tag{33}$$

$$\cos\phi_{By}=\{r_\theta/\sqrt[2]{\mu_f T_*}+r_\Gamma\cdot\cos\phi_\Gamma\}/r_{By} \tag{34}$$

$$\Theta_2\equiv\tan\theta_2=-\partial Z/\partial y=al\sin ly\cdot\sin\kappa(x-ct) \tag{35}$$

$$\tau=\tau_0\cdot\{1+\Psi_\tau(x,y,t)\} \tag{36}$$

$$\Psi_\tau(x,y,t)=r_\tau\cdot a\cdot\cos ly\cdot\sin\{\kappa(x-ct)-\phi_\tau\} \tag{37}$$

$$p_s=p_{s0}\cdot\{1+\Psi_p(x,y,t)\} \tag{38}$$

$$\Psi_p=r_p\cdot a\cdot\cos ly\cdot\sin\{\kappa(x-ct)-\phi_p\} \tag{39}$$

$$\phi_p=\phi_\tau\qquad r_p/r_\tau=\partial p_{s*}/\partial\tau_*|_{\tau_{*0}}\cdot(\tau_{*0}/p_{s*0}) \tag{40}$$

$$p_{s*}=F_0\cdot\tau_*\cdot(1-k_2\tau_{*c}/\tau_*)^m \tag{41}$$

$$r_p/r_\tau\equiv\{1+(m-1)\cdot k_2/\eta\}/(1-k_2/\eta) \tag{42}$$

$$\phi_0=U_0\cdot\{x-(\kappa/\beta)\cdot a\cdot[\{1+F_r^2\cdot(\kappa^2/\beta)h_0\cdot\tanh\beta\zeta\} /\{\tanh\beta h_0-F_r^2\cdot(\kappa^2/\beta)h\}]\cdot\cos\kappa(x-ct)\cdot\cos ly\} \tag{43}$$

$$\zeta_s(x,y,t)=r_s\cdot a\cdot\cos ly\cdot\sin\{\kappa(x-ct)-\phi_s\} \tag{44}$$

$$R_*\equiv r_s\cdot\cos\phi_s=-F_r^2\cdot(\kappa^2/\beta)h_0\cdot\mathrm{sech}\beta h_0/\{\tanh\beta h_0-F_r^2\cdot(\kappa^2/\beta)h_0\}\qquad \sin\phi_s=0 \tag{45}$$

$$U(x,y,t)=U_0\cdot\{1+\Psi_u(x,y,t)\} \tag{46}$$

$$U=\partial\phi_0/\partial x|_{\zeta=-h_0} \tag{47}$$

$$r_u\cdot\cos\phi_u=(\kappa^2/\beta)\cdot F_*\qquad \sin\phi_u=0 \tag{48}$$

$$F_*\equiv\{1-F_r^2\cdot(\kappa^2/\beta)h_0\cdot\tanh\beta h_0\}/\{\tanh\beta h_0-F_r^2\cdot(\kappa^2/\beta)h_0\} \tag{49}$$

$$dx/(\partial\phi_0/\partial x)=dy/(\partial\phi_0/\partial y)=dz/(\partial\phi_0/\partial z) \tag{50}$$

$$r_\Gamma=(\kappa l/\beta)\cdot F_*\qquad \phi_\Gamma=-\pi/2 \tag{51}$$