II—7

# 確率分布の母数の不確定性評価法

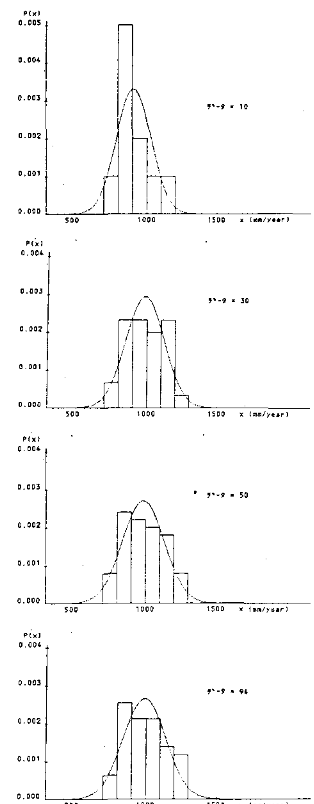
信州大学工学部　正　員　荒木　正夫
信州大学工学部　正　員　寒川　典昭
信州大学大学院　学生員　○渡辺　輝彦

## 1．はじめに

水工計画で対象とする水文資料は現在のところ小標本であるが、治水・利水計画ではこうした資料から必要な確率水文量を算定することが要求される。限られた資料から求められた水文量の信頼性は分布形の採用が適切であった場合、推定された母数の信頼性によって支配されるが、確率年の大きな水文量を算定する場合には、母数の信頼性が特に問題となる。本研究では、対象とする水文量を分布形が正規分布とみなせるものに限定し、資料の大きさと推定された母数の不確定さとの関係をエントロピーを用いて議論し、適用例を挙げる。

## 2．正規情報を取り入れた事後確率法則（宮沢、1971）によるエントロピー

### 2．1　平均未知、分散既知の場合の事後確率のエントロピー



図—1　確率分布の変動性

$\theta$ を平均とし、$\theta$ とは無関係に一定な既知の分散 $v$ をもって、n 個の確率変量 $\tilde{x}(n)=(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_n)$ が互いに独立に正規確率法則に従うとき、確率変量 $\tilde{\theta}$ の事前確率法則 $\xi(\theta)$ が $m_\theta$、$v_\theta$ をパラメタとする次の正規分布で与えられたとする。

$$\xi(n)=f_N(\theta|m_\theta,v_\theta)\ . \quad \cdots(1)$$

このとき、$\tilde{x}(n)=x(n)$ が与えられての $\tilde{\theta}$ の事後確率法則は次の正規分布となる。

$$\xi(\theta|x(n))=f_N(\theta|m_{\theta|x(n)},v_{\theta|x(n)})\ . \quad \cdots(2)$$

ここに、

$$m_{\theta|x(n)}=\frac{(1/v_\theta)\cdot m_\theta+(n/v)\cdot\bar{x}}{(1/v_\theta)+(n/v)}\ , \quad \cdots(3)$$

$$1/v_{\theta|x(n)}=(1/v_\theta)+(n/v)\ . \quad \cdots(4)$$

事後確率のエントロピーは式(2)より次式で与えられる。

$$H(\theta)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\theta|x(n))\cdot\ln\xi(\theta|x(n))d\theta \quad \cdots(5)$$

$$=\ln(2\pi e\,v_{\theta|x(n)})^{1/2}. \quad \cdots(6)$$

### 2．2　平均未知、分散未知の場合の事後確率のエントロピー

平均 $\theta$、精度 $h(=1/v)$ をもって、$\tilde{x}(n)$ が互いに独立に正規確率法則に従うとき、$(\tilde{\theta},\tilde{h})$ の事前確率法則 $\xi(\theta,h)$ が、$\alpha'$、$\beta'$、$n'$、$\nu'$ をパラメタとする次の正規—ガンマ分布で与えられたとする。

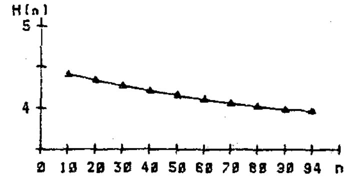
$$\xi(\theta,h)=\frac{n'^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{\Gamma(\nu'/2)}\left(\frac{1}{2}\beta'\nu'\right)^{\nu'/2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}n'h(\theta-\alpha')^2\right\}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\beta'\nu'h\right)h^{(\nu'-1)/2}. \quad \cdots(7)$$

このとき、 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ， $S=s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ・・・（8）

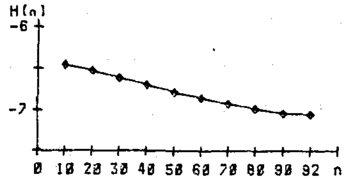
で与えられる $(\theta, h)$ に関する $\tilde{x}(n)$ にもとづく十分統計量を $\tilde{\bar{x}}$、$\tilde{S}$ とすると、$\tilde{\bar{x}}=\bar{x}$、$\tilde{S}=S$ が得られた後の $(\tilde{\theta},\tilde{h})$ の事後確率法則 $(\theta, h \mid x(n))$ はやはり正規－ガンマ分布で与えられ、そのパラメタは次式で与えられる。

$$
\begin{cases}
\alpha''=\dfrac{n'\alpha'+n\bar{x}}{n'+n}, \\
n''=n'+n, \\
\beta''=\dfrac{(\nu'\beta'+n'\alpha'^2)+(\nu S+n\bar{x}^2)-n''\alpha''^2}{\nu'+n}, \\
\nu''=\nu'+n.
\end{cases}
\quad \cdots (9)
$$

ただし $\nu=n-1$ とする。



図－2　分散既知の場合の資料数とエントロピー



図－3　分散未知の場合の資料数とエントロピー

このとき、事後確率のエントロピーは、これらのパラメタを式(7)に代入して次式で与えられる。

$$H(\theta, h)=-\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\theta, h \mid x(n))\cdot\ln\xi(\theta, h \mid x(n))d\theta\, dh \quad \cdots (10)$$

$$=-\ln D+G\cdot\{1+\ln E-\psi(G+\frac{1}{2})\}+1. \quad \cdots (11)$$

ここに、 $D=\dfrac{n''^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}}\dfrac{1}{\Gamma(\nu''/2)}(\frac{1}{2}\beta''\nu'')^{\nu''/2}$ ， $E=\frac{1}{2}\nu''\beta''$ ， $G=\frac{1}{2}(\nu''-1)$. ・・・（12）

$\psi(\cdot)$ ： digamma function

３．実測資料を用いた計算例

式（6)、式（11)は、確率変量 $\tilde{x}(n)$ が正規確率法則に従うことが前提になっているので、計算には経験的に正規分布をとる年降水量を対象とし、長野県内19ヶ所の年降水量への適用を試みた。ここでは長野市（資料総数94）の計算例を掲げる。図－１は、資料数の増加に伴うヒストグラムと確率分布の変動性をみたものである。資料数が少ないときの確率分布は不安定であることがわかる。図－2、図－3は、式（6)、式（11)の計算結果である。ここで、事前確率分布に与える情報としての平均、分散、資料数（分散未知の場合）は、全資料を用いた場合の情報を採用し、また取り入れる情報は10個刻みとした。これらの図より、取り入れる情報の増加とともにエントロピーは減少し、推定される母数の不確定さの減少度がうかがわれる。

４．おわりに

今後、事後確率のエントロピーを、推定された母数のもつ不確定さとの関係を具体的に関連づけることにより、母数の不確定さを示す尺度としてより明確なものにしていく必要があろう。また、確率変量が正規分布以外の母集団に属する場合の検討も必要である。最後に、本研究を行なうにあたり、信州大学学生、上原君の協力があったことを記し、謝意を表する。

宮沢　光一：情報・決定理論序説，岩波書店，1971．