

多変数MEP分布の諸特性

信州大学工学部 正 員 荒 木 正 夫

信州大学工学部 正 員 寒 川 典 昭

信州大学大学院 学生員○佐 藤 健 次

1. はじめに

我々は、与えられた情報（制約条件）の下で相互エントロピーを最大にする多変数MEP分布を考察し、その理論展開をはかった。本稿では、実測水文諸量への適用性を検討する前に、同分布の諸特性を明らかにするため、既存分布の導出を行い、3変数正規分布を母集団として、適合度性を検討した。

2. 理論式¹⁾

多変数MEP分布は、(1)式の任意関数 $G_r(\cdot)$ を制約条件とした時、(2)式で与えられる。

$$\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} G_r(x_1, \dots, x_n) P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = E[G_r(x_1, \dots, x_n)] \quad r=1, \dots, M \quad (1)$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ -1 - \sum_{r=1}^M \lambda_r G_r(x_1, \dots, x_n) \right\} \quad (2)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は期待値記号であり、上式は $G_r(\cdot) = 1$ を含み、 λ_r はラグランジュ乗数である。いま、 $G_r(\cdot)$ として任意次数のモーメントを採用すると、(2)式は(3)式のように書き換えられる。

$$P(x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ -1 - \sum_{a_1=1}^{H_{a_1}} x_1 \gamma_{a_1} x_1^{a_1} - \cdots - \sum_{a_n=1}^{H_{a_n}} x_n \gamma_{a_n} x_n^{a_n} - \sum_{b_n=0}^{H_{b_n}} \cdots \sum_{b_1=0}^{H_{b_1}} \delta_{b_1 \cdots b_n} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $b_1 = \cdots = b_n = 0$ とは、確率密度関数が具備すべき条件を示し、 $x_1 \gamma_{a_1}, \dots, x_n \gamma_{a_n}, \delta_{b_1 \cdots b_n}$ は、ラグランジュ乗数である。

3. 既存分布の導出

一般に、MEP分布は、与えられた情報（制約条件）の下でエントロピーを最大にする分布であり、情報の与え方によって、統計学においてよく知られている分布形のいくつかを表現することができる。たとえば、(4)式の制約条件では、(5)式の変数一様分布を導出することができる。

$$\int_0^{x_1^*} \cdots \int_0^{x_n^*} P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1 \quad (4)$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1^* \cdots x_n^*} \quad (5)$$

また、(6.1)式と(6.2)～(6.n+1)式のような各変数の原点まわりの1次モーメントを制約条件とした場合、(7)式の相関を含まない多変数指数分布を導出することができる。

$$\begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1 \quad (6.1) \\ \vdots \\ \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} x_1 P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = x_1 \mu_1 \quad (6.2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \vdots \\ \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} x_n P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = x_n \mu_n \quad (6.n+1) \end{array} \right.$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1 \mu_1 \dots x_n \mu_1} \exp \left\{ -\frac{1}{x_1 \mu_1} x_1 - \dots - \frac{1}{x_n \mu_1} x_n \right\} \quad (7)$$

このような情報の与え方、つまり(1)式における $g_r(\cdot)$ の与え方によって、MEP分布は、種々の分布形をとることができる。このことは、この分布が1変数におけるピアソン系の分布と同レベルで議論すべきものであることを示している。

4. 適合度検定

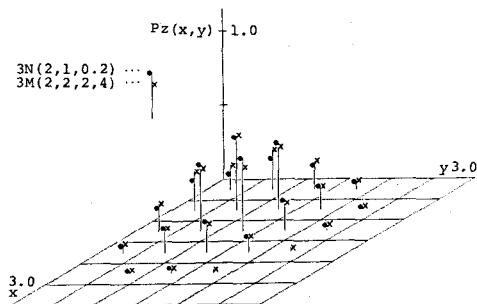
我々は、多変数MEP分布の適合度を検定するにあたり、対称な3変数正規分布²⁾($3N(a=2, \sigma=1, \rho=0.2, 0.5, 0.8)$)を母集団とし、規準化された任意モーメントを制約条件として、3変数MEP分布を求めた。図-1は、母集団と3変数MEP分布について、3次元の確率密度関数 $p(x, y, z)$ を xy 平面についての2次元の周辺確率密度関数 $Pz(x, y)$ として、1つのメッシュがもつ確率をメッシュ面積で除した値を柱状で表現したものである。なお、図中における $3M(2, 2, 2, 4)$ とは、制約条件において、各変数のモーメントは2次まで採用し、相乗に関しては、 xy, yz, zx モーメントと具備すべき条件の4つを採用したことを示している。母集団に対しての $3M(2, 2, 2, 4)$ の適合度は、原点付近では劣るが、これは、母集団の確率変数が $[-\infty, +\infty]$ に対して、MEP分布では $[0, +\infty]$ であることに起因している。しかし、全体的には高い適合度を示している。つまり、1変数正規分布が2つのパラメタによって確定され、2次モーメントまでで、パラメタ同定がなされることに起因される。さらに高次モーメントによる適合度検定では、母集団の負の値が高次モーメントに影響を与えるため、適合度の改善がなされなかった。

5. 終わりに

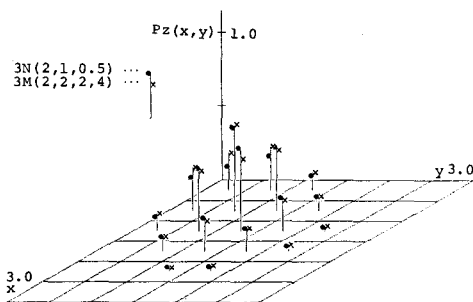
本研究では、多変数MEP分布の諸特性として、既存分布の導出と、3変数正規分布を母集団とした3変数MEP分布の適合度について検討を加えた。今後は、実測水文諸量への適用性について評価したいと考えている。最後に、本研究を行なうにあたり、計算等で信州大学工学部学生鈴木隆弘君に援助を得た。記して謝意を表する。

1) 寒川・荒木：多変数MEP分布の理論式について、第41回土木学会年講(昭和59, 10)

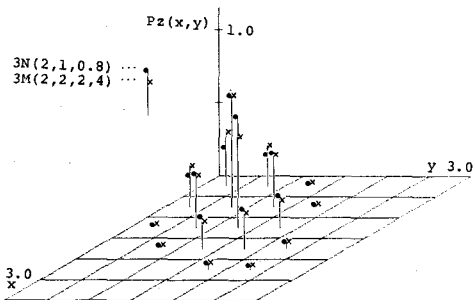
2) たとえば、ウィルクス：数理統計学, pp.95-96, 育文社, 1952年



(a) $\rho = 0.2$ の場合



(b) $\rho = 0.5$ の場合



(c) $\rho = 0.8$ の場合

図-1 母集団とMEP分布の柱状グラフ