

東海大学海洋学部 学生員 〇坂川 康一

東海大学大学院 学生員 川上哲太郎

東海大学海洋学部 正員 北原 道弘

1. 諸言

積分方程式法は、対象とする境界の形状が複雑な場合や、領域が無限遠を含む問題などに対し有効な数値解析手法であることが知られている。また、この手法では未知量が境界上のみに存在するの、未知数を減らすことができるとえ、境界上の値も高精度に求めることができるという利点も有している。

本研究は、この積分方程式法を用いることにより、2、無限弾性体中に空洞が存在する場合における、空洞上の変位および周辺応力の解析を行ったものである。

2. 基礎式および諸条件

Fig.1に示すような外部領域Dにおいて、均質・等方な線形弾性体の基礎式は次のようである。

$$\mu \Delta \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{U}} \quad \dots (1)$$

初期条件 $\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in D$

境界条件 $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \partial D$

$\mathbf{x}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \partial D, t$

$\mathbf{b}$: 物体力ベクトル λ : Lamé定数 ∇ : Gradient
 $\mathbf{U}$: 変位ベクトル μ : 弾性係数 Δ : Laplacian
 ρ : 密度 $\dot{(\cdot)}$: 時間微分

$\mathbf{U}_0(\mathbf{x})$: 初期変位

$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$: 境界変位

$\mathbf{V}_0(\mathbf{x})$: 初期速度

$\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$: 境界表面力

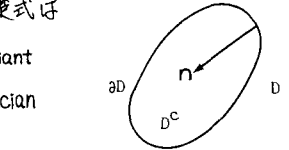


Fig.1 Exterior domain D

とくにDが外部領域であるため、散乱場 $\mathbf{U}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t)$ は $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ のとき、次の放射条件を満足しなければならぬ。

$$\frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial r} + \frac{1}{C_L} \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} = O(r^{-\frac{n-1}{2}}), \mathbf{U}_s = O(r^{-\frac{n-3}{2}}), \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial r} + \frac{1}{C_T} \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} = O(r^{-\frac{n-1}{2}}), \mathbf{U}_{ss} = O(r^{-\frac{n-3}{2}}) \quad \dots (3)$$

$\mathbf{U}_L$: $\mathbf{U}_s$ の非回散場を表す, $\mathbf{U}_{ss}$: $\mathbf{U}_s$ のルイト場を表す, $\mathbf{U}_s = \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_{ss}$, $\nabla \times \mathbf{U}_s = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{U}_{ss} = 0$, C_L : 縦波の速度, C_T : 横波の速度

ここで時間 t に関するFourier変換を行うと、初期値境界問題(1)~(3)式は、次に示す定常的な境界値問題へと変換される。ここで簡単化をはかるために、物体力 $\mathbf{b} = 0$ と仮定する。

$$\mu \Delta \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) + \rho \omega^2 \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \dots (4)$$

境界条件 $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial D, \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega) = \bar{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial D, \omega$ (5)

放射条件 $\frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial r} - \frac{i\omega}{C_L} \mathbf{U}_s = O(r^{-\frac{n-1}{2}}), \mathbf{U}_s = O(r^{-\frac{n-3}{2}}), \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial r} - \frac{i\omega}{C_T} \mathbf{U}_{ss} = O(r^{-\frac{n-1}{2}}), \mathbf{U}_{ss} = O(r^{-\frac{n-3}{2}}) \quad \dots (6)$

$$\mathbf{U}_s(\mathbf{x}, \omega) = \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \omega) - \hat{\mathbf{U}}_I(\mathbf{x}, \omega)$$

3. 積分方程式による定式化

上記定常弾性問題を、本研究ではGreenの公式による直接法により積分方程式に定式化する。また、簡単のため $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \omega)$ を $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$ と書くことにする。

外部領域Dにおいて、散乱波 $\mathbf{U}_s = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0$ に対しては、 $\mathbf{U}_s$ が放射条件を満足することから、次の積分表現が成立する。

$$\int_{\partial D} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}_s(\mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial D} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{U}_s(\mathbf{y}) dS_y = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in D^c \\ \mathbf{U}_s(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in D \end{cases} \quad \dots (7)$$

また、入射波 U_i に対し $(U_i \in D)$ に拡張)次式が成立する。

$$\int_D U(\alpha, y) t(\alpha) dS_y - \int_D T(\alpha, y) U_i(\alpha) dS_y = \begin{cases} -U_i(\alpha) & \alpha \in D^c \\ 0 & \alpha \in D \end{cases} \quad \dots (8)$$

(7)式と(8)式の和をとれば、全変位 U に対する次の積分表現を得る。

$$\int_D U(\alpha, y) t(\alpha) dS_y - \int_D T(\alpha, y) U(\alpha) dS_y + U_i(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha \in D^c \\ U(\alpha) & \alpha \in D \end{cases} \quad \dots (9)$$

D 内の α から境界への極限をとれば、境界上の点 α に対する次の積分方程式を得る。

$$CU(\alpha) = \int_D U(\alpha, y) t(\alpha) dS_y - \int_D T(\alpha, y) U(\alpha) dS_y + U_i(\alpha) \quad \alpha \in \partial D \quad \dots (10)$$

ここに、 CU は2重層ポテンシャルのFree termであり、放射条件を満足する基本解は次のようである。

(2次元問題)

$$U(\alpha, y) = \frac{i}{4\mu} [H_0^{(2)}(k_T r) \mathbf{1} + \frac{1}{k_T^2} \nabla \nabla \{H_0^{(2)}(k_T r) - H_0^{(2)}(k_L r)\}] \quad \dots (11)$$

ここに、 $k_L = \omega/c_L$, $k_T = \omega/c_T$ 。また2重層核 T は次のように定義される。

$$T(\alpha, y) = U(\alpha, y) \mathbf{T}^T \quad \dots (12)$$

与えられた入射波と境界条件のもとで、(10)式を離散化して数値的に解くことにより、境界上の変位と表面力を求めることができる。本研究においては境界要素として2次のアイソパラメトリック要素を用いた。また、境界上の応用は変位を共変微分することにより求めることができる。

4. 数値計算例

無限弾性体中に空洞が存在するモデルFig.2について、境界上の変位と周辺応力を計算し、定常問題のMow & Menteの解析結果との比較を行った。Table.1は $ak_T = 0.1$ のSV波を入射した場合の、 $|U_r/U_i|$ と $|U_\theta/U_i|$ の比較を行ったものである。ここに U_r, U_θ はそれぞれ境界上の半径方向、周方向変位である。Fig.3-a, 3-bは、SV波の波数 ak_T が0.1, 1.0, 1.5に対する $|U_r/U_i|$, $|U_\theta/U_i|$ の比較を示したものである。2つの解析結果がよく一致していることが判る。

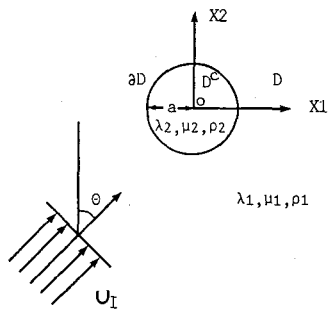


Fig.2 Geometry of the model

Table.1 Steady displacement fields on a circular hole (SV-wave)
 $ak_T = 0.1$

deg	$ U_r / U_i $		$ U_\theta / U_i $	
	BEM	Mow & Mente	BEM	Mow & Mente
0	0.0000	0.0000	1.0017	1.0017
15	0.2635	0.2636	0.9662	0.9662
30	0.5066	0.5066	0.8631	0.8631
45	0.7114	0.7114	0.7027	0.7027
60	0.8654	0.8654	0.4996	0.4995
75	0.9609	0.9609	0.2733	0.2733
90	0.9941	0.9941	0.1030	0.1030
105	0.9637	0.9637	0.2691	0.2691
120	0.8702	0.8702	0.4973	0.4973
135	0.7169	0.7169	0.7032	0.7032
150	0.5113	0.5113	0.8664	0.8664
165	0.2663	0.2663	0.9715	0.9715
180	0.0000	0.0000	1.0078	1.0078

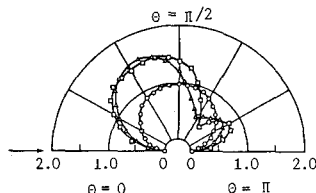


Fig.3-a Distribution of $|U_r/U_i|$ for various ak_T with $\nu=0.25$

(— Mow & Mente ; ○, ▲, □, BEM)

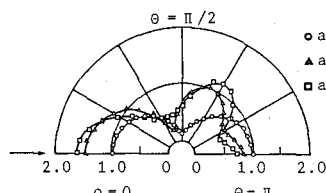


Fig.3-b Distribution of $|U_\theta/U_i|$ for various ak_T with $\nu=0.25$

(— Mow & Mente ; ○, ▲, □, BEM)

参考文献

1. 池田孝文, 積分方程式法による地盤内構造物の動的応答特性の解析。

京都大学工学部修士論文, 1984

2. Mow, C.C. & Mente, L.J.; J. Appl. Mech., Vol. 30, pp 598~604, 1963