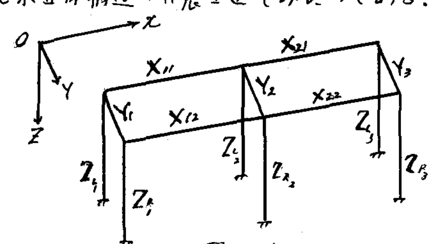
立体骨組構造物の強制振動

信州大学　正員　○夏目正太郎
信州大学　正員　石川　清志

§1. まえがき　　固有マトリクス法による構造物の強制振動は、1979年にASCE誌上で公表され、1次元系ではあるが成果を認められた。その後2次元系ラーメンの地中構造物の強制振動を扱い、その手法に満足する結果を得たので、今回3次元系立体構造へ発展させてみたのである。



図－1.

骨組構造物は1本の棒を組み立てて構築されているとすれば、棒の挙動の集積されたものが、構造物全体の挙動となる筈であるので、棒のすべての変位を素材として取上げる。ここでは振動挙動を扱うので、(1)たて振動，(2)ねじり振動，(3)2方向たわみ振動をもつて、その挙動とする。よってこれらの微分方程式からそれぞれの変位をあらわす関数式が示される。変位はすべて、微分方程式の同次解と、特殊解（外力項を含むもの）からなつているとするが、固有マトリクス法にては、外力については、荷重マトリクスを設定するので、特殊解の微分方程式も、右辺ゼロとして同次解と同じ形式をとらせる。そして特殊解にみられる固有マトリクス（未定常数群）は外力に相当する値により一義的に求まるが、同次解は境界条件により行列式がゼロになる固有値は定まるが、これだけでは同次解の固有マトリクスは決定されない。しかし、未定係数の1つを選んで、例えばそれをΩとおけば、このΩとの比の値は決まる。このΩを最後に、初期条件として静止の状態を用いて、すなわち一般変位とその速度をゼロとすることにより、Fourie級数であらわした変位からΩ_nを決定することが出来る。これですべての未定常数が求まったので、任意の時間における、任意の点の状態量を知ることが出来る。

§2. 基本式　　微分方程式はよく知られたもので1本の棒の挙動をあらわすものである。

(i) たて振動

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{\gamma A L^2}{g E A}\frac{\partial u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

$$u = L\lfloor \cos\mu\rho \quad \sin\mu\rho \rfloor N_u e^{i\omega t} \tag{2}$$

$$\mu^2 = \frac{\gamma A \omega^2 L^2}{g E A} \tag{3}$$

$$W_u(\rho) = \begin{bmatrix} u \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ EA\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{EA\mu}{L} \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \cos\mu\rho & \sin\mu\rho \\ -\sin\mu\rho & \cos\mu\rho \end{bmatrix} N_u e^{i\omega t} \tag{4}$$

(ii) ねじり振動

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - \frac{\gamma A i^2 L^2}{g G J}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

$$\phi = L\lfloor \cos\lambda\rho \quad \sin\lambda\rho \rfloor N_\phi e^{i\omega t} \tag{6}$$

$$\lambda^2 = \frac{\gamma A i^2 L^2 \omega^2}{g G J} \tag{7}$$

$$W_\phi(\rho) = \begin{bmatrix} \phi \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ GJ\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\phi = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{GJ\lambda}{L} \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \cos\lambda\rho & \sin\lambda\rho \\ -\sin\lambda\rho & \cos\lambda\rho \end{bmatrix} \times N_\phi e^{i\omega t} \tag{8}$$

(iii)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{\gamma A L^4}{g E I}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

$$w_{\substack{1\\2}} = L\lfloor \cos\nu\rho \quad \sin\nu\rho \quad ch\nu\rho \quad sh\nu\rho \rfloor_{\substack{1\\2}} N_{w_{\substack{1\\2}}} e^{i\omega t} \tag{10}$$

$$\nu_{\substack{1\\2}}^4 = \frac{\gamma A L^4 \omega^2}{g E I_{\substack{1\\2}}} \tag{11}$$

$$W(\rho) = \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\nu}{L} \\ -\frac{EI\nu^2}{L^2} \\ -\frac{EI\nu^3}{L^3} \end{bmatrix}^D_{\substack{1\\2}} \begin{bmatrix} \cos\nu\rho & \sin\nu\rho & ch\nu\rho & sh\nu\rho \\ -\sin\nu\rho & \cos\nu\rho & sh\nu\rho & ch\nu\rho \\ -\cos\nu\rho & -\sin\nu\rho & ch\nu\rho & sh\nu\rho \\ \sin\nu\rho & -\cos\nu\rho & sh\nu\rho & ch\nu\rho \end{bmatrix}_{\substack{1\\2}} N_{w_{\substack{1\\2}}} \times e^{i\omega t} \tag{12}$$

§3. 平衡条件と適合条件　　X軸に平行な部材を主桁とし、Y軸方向の部材を横桁、Z軸と一致する部材を柱とする。これら3軸方向にある部材を1つのグループとして、Y−Z面で切断して考えると、中間の断面で力の平衡と変位の相等を考えておけば、前後の断面のものはその中に含まれるし、わずかな手直しで表現される。今1部材の状態量を前記の(4)、(8)、(12)等で示せば、

$$W(\rho)=\begin{bmatrix} W_u \\ W_{\omega 1} \\ W_\phi \\ W_{\omega 2} \end{bmatrix} N e^{i\omega t} \qquad (13)$$

ここで $W_{\omega 1}$ は X軸、Y軸平行部材については Z方向へのたわみから生ずるもので Z軸平行の部材については Xの負方向へのたわみから誘導される。$W_{\omega 2}$ については主桁と柱は Y方向で横桁については Xの負方向のたわみから誘導されるものである。

固有マトリクス N については、図−1 にあるように、**X**，**Y**，**Z** によって示すことにする。

$$\begin{bmatrix} R_{zL}(0) & 0 \\ 0 & R_{zR}(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_{xL}(1) & 0 \\ 0 & R_{xR}(1) \end{bmatrix}_1\begin{bmatrix} X_{11}+\langle K_{11}\rangle \\ X_{12}+\langle K_{12}\rangle \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} R_{xL}(0) & 0 \\ 0 & R_{xR}(0) \end{bmatrix}_2\begin{bmatrix} X_{21}+\langle K_{21}\rangle \\ X_{22}+\langle K_{22}\rangle \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} R_{YL}(0) & 0 \\ 0 & R_{YR}(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ Y+\langle K_Y\rangle \end{bmatrix} \qquad (14)$$

この他に横桁と柱、主桁1と2の間で変位相等の条件が必要である。それは

$$\begin{bmatrix} H(0) & 0 \\ 0 & H(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ Y+\langle K_Y\rangle \end{bmatrix}_3=\begin{bmatrix} V(0)_L & \\ & V(0)_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}_3 \; ; \quad (15) \qquad \begin{bmatrix} U_1(1) & \\ & U_2(1) \end{bmatrix}_1\begin{bmatrix} X_{11}+\langle K_{11}\rangle \\ X_{12}+\langle K_{12}\rangle \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1(0) & \\ & U_2(0) \end{bmatrix}_2\begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

である。(14)の中の Y に関する項を(15)によって消去すると、(14)は **Z** と **X** に関する式となる。一方境界条件は、すべて **Z** に関する式として、変位をすべてゼロとし、固定端とすれば、

$$B(0)Z(0)=0 \qquad (17)$$

となるので、(16)式と共に **X** に関する方程式となる。従って荷重マトリクス **K** がない同次解から成る行列式をゼロとする固有値 $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \cdots$ が決定されるし、特殊解では未定常数が一義的に定まる。固有値が決定すると、Ω_n なる未定常数を選びこれにて状態量を次のように書ける

$$W(\rho)=\sum_1^n DR\,P_n(\omega)\,\Omega_n e^{i\omega t}+DR[N_p+\langle K\rangle]\sin pt \qquad (18)$$

§4. 初期条件による Ω の決定

X，Y，Z方向の変位と変位速度を u_x, u_y, u_z，$\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z$ とすると、これらを Fourier 級数表示としてみれば同次解のものと、特殊解のものとは u_h，u_p

$$u_h=\sum_1^n\sum A_h \sin n\pi\rho \qquad \dot{u}_h=\sum_1^n\sum i\omega\cdot A_h \sin m\pi\rho\;, \qquad u_p=\sum A_p \sin m\pi\rho \qquad \dot{u}_p=\sum pA_p \sin m\pi\rho \qquad (19)$$

である。従って各部材から、u_x, u_y, u_z に相当する変位を選び出して、(19)へあてはめ、領域内で積分すれば Fourier 係数を決定出来る。Fourier 級数で表現されるこれら変位、速度は初期条件としては静止を考えればゼロであるので級数の各項毎の係数の和がゼロになる。故に

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \vdots \\ \Omega_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}=0 \qquad (20)$$

でこの連立方程式を解くことにより Ω_n が定まり、すべての未定常数が定まるので、(18)に見られる状態量を知ることが出来る。

参考文献：　谷本勉之助　著　マトリクス構造解析（日刊工業新聞）
　　　　：　谷本・ストイル　共著　演算子法構造解析　（森北出版）