

弾性体中のクラック先端部分の応力集中を有限として扱う応力関数についての研究

岐阜大学工学部 学生員 〇 段 樹金
(華北水利水电学院 研修生)
岐阜大学工学部 学生員 木村映二
岐阜大学工学部 正員 中川建治

1 まえがき

スリット状のクラックを内部に含む弾性体に荷重が作用する場合を研究の対象にする。弾性学の一般的な解によると、クラック先端部分に無限大の応力集中が発生することになるが、これは不合理であって、実際には塑性変形が生じて有限な応力集中となっている。弾性解でありながら有限な応力集中を与えるような応力関数を導くのが本研究のテーマである。

解法の基本はつぎのような方法によっている。平板の2次元問題では、長さ $2a$ のスリット状のクラックを含む場合の従来の解 $f(x, y, a)$ を重み関数 $p(a)$ を乗じつつ a に関して区間 $(a, a+c)$ にわたって積分する。3次元体の場合には、厚さ 0 、半径 a の円板状クラックを内部に含む無限弾性体の解 $u(x, y, z; a)$, $v(x, y, z; a)$, $w(x, y, z; a)$ を導いて、重み関数 $p(a)$ を乗じて a に関して区間 $(a, a+c)$ にわたって積分する。

このようにして得られる解は、 $p(a)$ を適当に選ぶことによって、有限な応力集中で種々な形状のものを与える。区間 $(a, a+c)$ は応力度が急勾配で変化しつつ大きな変位も生じている遷移区間である。

2 直交異方性の無限板に任意な方向のクラックが存在する場合

図-1 に示すような任意の傾きのクラックを含む直交異方性板を対象とする。微分方程式と変数諸量は、 $\beta_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + 2K\beta_2^2 \beta_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$, $x = \beta_2 x$, $y = \beta_3 y$, $C = \cos \theta$, $S = \sin \theta$, $\xi = Cx + Sy$, $\eta = -Sx + Cy$, $z_1 = \sqrt{K}x + i y$, $z_2 = -\sqrt{K}x + i y$ とする。
 $\sqrt{K} = \sqrt{\frac{1+K}{2}} + i\sqrt{\frac{1-K}{2}}$

無限遠方で、 σ_{x0} , σ_{y0} , τ_{xy0} を受ける場合の基本解 $w(x, y, a)$ はつぎのようになる。

$$w(x, y, a) = (\beta_3 + i\beta_1)z_1^2 + (\beta_3 + i\beta_2)z_2^2 + (\beta_4 + i\beta_5)F(z_1, h_1 a) + (\beta_6 + i\beta_7)F(z_2, h_2 a)$$

$$F(z, A) = \frac{1}{2} [z\sqrt{z^2 - A^2} - A^2 \ln(z + \sqrt{z^2 - A^2})]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \{C\sqrt{\frac{1+K}{2}} + i(\sqrt{\frac{1-K}{2}}C \pm S)\} \xi - \{S\sqrt{\frac{1+K}{2}} + i(\sqrt{\frac{1-K}{2}} \mp C)\} \eta = \frac{h_1}{h_2} \xi - \frac{\beta_1}{\beta_2} \eta$$

ここに、 $\beta_1 \sim \beta_7$ は境界条件で定まる定数である。有限な応力度にするための積分 $\int_a^{a+c} w(x, y, a) p(a) da$ の重み $p(a)$ は、図-2 に示すようなものとして計算した結果を示す。

3 3次元弾性体中の円板状クラック先端部分の応力集中

図-5 に示すように、原点を中心に厚さ 0 、半径 a の円板状のクラックを内部に含む無限弾性体が一様な引張り力 σ_{z0} を受けているものとする。この場合の $z=0$ 平面上の応力度 $\sigma_z(x, y)$ は、

$$\sigma_z(x, y, a) = \frac{2\sigma_{z0}}{\pi} \left\{ \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \tan^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right) \right\}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{とする。}$$

これは $r=a$ で無限大となるが、図-6 に示すように、 $p(a)$ による相乗積分によって有限な応力集中を示す。

4) 解析結果

直交異方性板の引張りにおいて、重み $p_j(a)$ の形状を簡単なものを仮定した結果を図-2 に示す。積分の区間 $(a, a+c)$ の長さ C をそれぞれ変化させて場合の応力集中の変化を示したのが図-3 であり、クラックの方向 θ_c を変化させてクラック先端部分の微小円周上応力 σ_θ を示したのが図-4 である。この解析例では開口部の長さ $2a = 20 \text{ cm}$ 、周辺応力 $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 100 \text{ kg/cm}^2$, $\tau_{xy0} = 0$ としている。

3次元の厚さ 0 のクラック (直径 $2a = 20 \text{ cm}$) の場合の結果を図-6 に示すが、応力集中の形状は2次元の場合と非常に良く似ていることが分る。

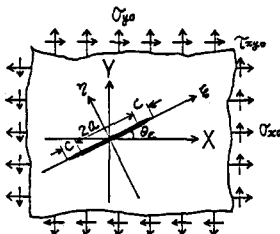


図-1 直交異方性板

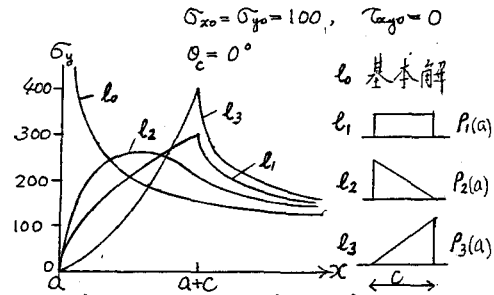
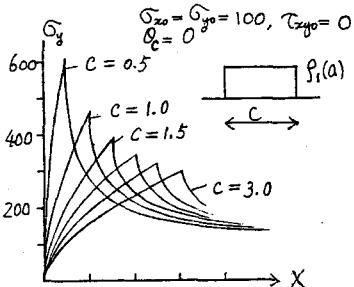
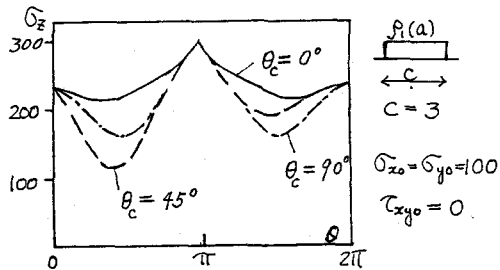
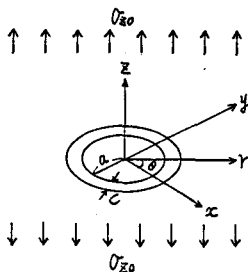
図-2 直交異方性板、重み p_j による変化図-3 直交異方性板、遷移区間 C の変化による応力集中図-4 直交異方性板、 θ の変化に伴うクラック先端部 σ_θ の変化

図-5 3次元弾性体中の円形クラック

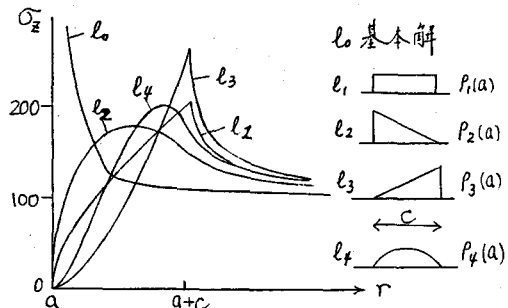


図-6 3次元弾性体円形クラック先端部応力