

面外変形を受ける薄板の固定辺上の応力集中

名古屋工業大学 学生員 ○杉本 孝博
名古屋工業大学 正 員 長谷部宜男

1. まえがき 薄板の曲げ問題において固定辺隅角部が丸味を有するとき、その隅角部先端に生じる応力集中の法則を考察する。平面弾性問題における固定辺上の応力集中に関してはすでに発表している。^{13,21} 固定辺に対するこれらの問題は、実用的には構造的な固定辺の応力集中の他、異種材料（一方が剛な場合）の接合部における応力集中などに適用できる。

隅角部近傍に注目したとき、一般の応力状態は隅角部2等分線に对称な応力状態と逆対称な応力状態の重ね合わせによって与えられるので、ここでは対称、逆対称の2つのモデルを考える。応力集中は曲げモーメントとせん断力に対して調べ、これらの値がWilliamsによる曲げモーメントのオーダー、せん断力のオーダーを用いて、平面弾性問題の場合と同様な形式に書けることを示す。また解析には有理写像関数およびたわみに関する複素応力関数を用いる。また応力分布の例をも示す。

2. 解析モデルと応力分布 切欠き底に丸味を有する半無限板を考える。対称応力状態に対しては境界はすべて固定し、隅角部2等分線に对称な荷重として無限遠に一樣な曲げモーメント M_0 、 νM_0 （ ν はポアソン比）を作用させる（Fig.1参照）。 νM_0 は M_0 によって生じる x 方向の無限のたわみを打ち消すために必要である。また逆対称荷重としてはFig.2に示すように半無限境界上に x 方向に關する一樣なたわみ角 $\partial w/\partial x = C_0$ を与える。切欠き部分の境界は固定する。これらの応力分布を $\nu=0.25$, $2\alpha\pi=270^\circ$, 切欠き底の曲率半径 $\rho/a = -0.2630$ の場合についてFig.1,2に示す。Fig.1は対称荷重, Fig.2は逆対称荷重に対してのものである。切欠き底で対称荷重では M_r, N_r , 逆対称荷重では N_θ による応力集中が生じている。

3. 固定辺上の応力集中 先端に丸味のない鋭い角を持つ弾性領域において隅角部付近の境界が固定されているとき、隅角部の角度 $2\alpha\pi$ と曲げモーメントのオーダー m との関係は、

$$\sin 2\alpha\pi(m+1) + (m+1)\sin 2\alpha\pi = 0 \quad (1)$$

$$\sin 2\alpha\pi(m+1) - (m+1)\sin 2\alpha\pi = 0 \quad (2)$$

で表わされる。式1は隅角部2等分線に对称な応力状態の場合に、式2は逆対称な場合にそれぞれ成り立つ。これから求まる

無限個の根（複素根も含む）のうち $\operatorname{Re}[m+1] > 0$ なるものは隅角部近傍の曲げモーメントの振舞いを表わす。これらの m を実部の小さいものから順番を付け m_j ($j=1,2,\dots$)とする。またせん断力のオーダー n_j は m_j を用いて $n_j = m_j - 1$ によって与えられる。

Fig.3~5に切欠き底に生じる応力集中値と ρ との関係を示す。 $\nu=0.25$ である。Fig.3,4は対称応力

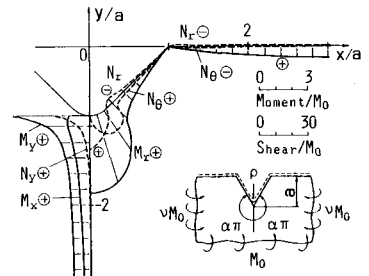


Fig.1. 対称荷重下における応力分布。

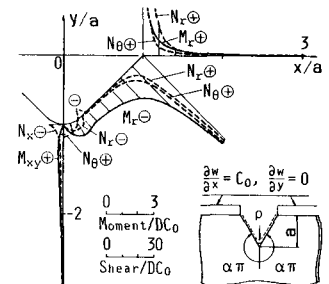


Fig.2. 逆対称荷重下における応力分布。
(D:曲げ剛性)。

状態における M_r および N_r , Fig.5は逆対称状態における N_0 の値を示す。これらの曲線は ρ/a の比較的小さい範囲では直線的な変化をし、その直線の勾配はそれぞれの場合に応じて式1,2より求まる m_1 または m_2 の値に近い。これより丸味を有する固定辺隅角部先端の応力集中値が次のように書けることが考えられる。すなわち、

$$M_{max} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j}, \quad N_{max} = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \rho^{n_j} \quad (3)$$

ここに M_{max} , N_{max} は隅角部先端の曲げモーメントおよびせん断力による応力集中値であり、 k_j , h_j は境界条件等によって決まる定数である。実際これらの曲線は式3の始めの数項を採った式で精度よく表わすことができる。その例として曲げモーメントについて述べる。Fig.3の曲線を次の式

$$M_{max}/M_0 = \sum_{j=1}^{\infty} k_j (\rho/a)^{m_j} \quad (4)$$

$$M_{max}/M_0 = \sum_{j=1}^{\infty} k_j (\rho/a)^{m_j} \quad (5)$$

によって近似する。 $2\alpha\pi=360^\circ$ では $P=2, 8=3$, 他の3つの角度では $P=3, 8=5$ とする。式4, 5の複素根 $m_j=u+iv$ の項は互いに共役な根 m_{j+1} の項と共に、

$$k_j (\rho/a)^{m_j} + k_{j+1} (\rho/a)^{m_{j+1}} = (\rho/a)^{\mu} [k_1 \cos\{\nu \log(\rho/a)\} + k_2 i \sin\{\nu \log(\rho/a)\}]$$

と書き改められるので、これを用いる。

Table.1に各角度における m_j の値と式4,5を最小2乗法によってFig.3の曲線にあてはめた場合の k_j の値を示す。またこれらの値を用いて式4,5によって得られた M_{max}/M_0 とそれらの誤差をTable.2に示す。その精度は全体的によく、かつ式5は式4に比べ、さらに精度が向上していることが分かる。(参考文献) 1) 杉本, 長谷部: 昭和58年度土木学会中部支部概要集, I-12, PP24-25. 2) 杉本, 長谷部: 土木学会年講概要集, I-107, PP213-214, 1984. 3) M.L. Williams: Natio. Cong. of App. Mech, PP325-329, 1952.

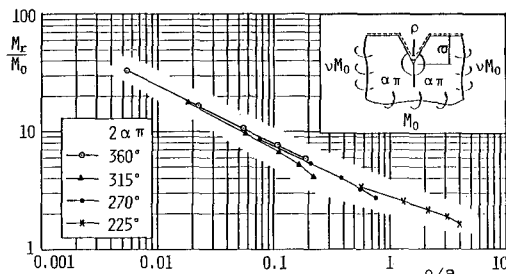


Fig.3. 材料荷重下における切欠き底の最大曲げモーメント M_r と ρ との関係。

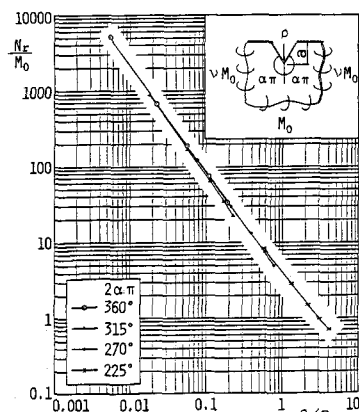


Fig.4. 材料荷重下における切欠き底の最大せん断力 N_r と ρ との関係。

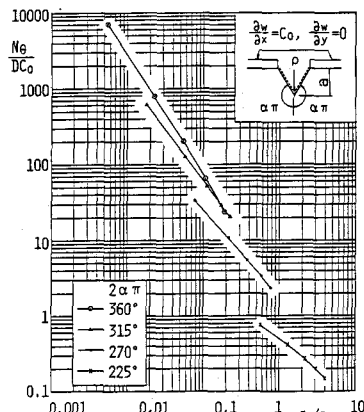


Fig.5. 逆対称荷重下における切欠き底の最大せん断力 N_0 と ρ との関係。

Table.1.- 対称応力状態における m_j の値とEqs.4,5の係数の値。

$2\alpha\pi$	m_1	m_2	m_3	k_1/M_0	k_2/M_0	k_3/M_0
360°	-0.5	0.5	1.0	2.4056	1.0598	-1.2774
				2.4013	1.5439	
315°	-0.4950	0.4051±0.0112i	1.5528±0.2187i	2.4033	-2.9938, -86.7875	
				2.4879	-0.3866, 38.0115	-14.9447, -26.8541
270°	-0.4555	0.6293±0.2313i	1.9718±0.3739i	2.6684	-0.3076, -0.5819	
				2.7548	1.2774, 3.8602	-1.7105, 3.6312
225°	-0.3264	0.9593±0.2216i	2.5688±0.4037i	2.8330	-0.0075, -0.0290	
				2.8960	-0.0446, 0.5293	-0.0309, 0.0200

Table.2. 対称荷重下における曲げモーメントの応力集中値とEqs.4,5による近似値およびそれらの誤差。

$2\alpha\pi$	ρ/a	M_{max}/M_0 (1)	M_{max}/M_0 of Eq. 4 (2)	Error (1)-(2) ×100 (1)	M_{max}/M_0 of Eq. 5 (3)	Error (1)-(3) ×100 (1)
360°	0.00550	32.487	32.523	-0.11 %	32.492	-0.02 %
	0.02339	16.231	16.234	-0.02	16.249	-0.11
	0.05397	10.633	10.602	0.29	10.626	0.07
	0.10597	7.745	7.735	0.13	7.744	0.01
	0.19089	5.926	5.969	-0.73	5.927	-0.02
315°	0.01799	17.798	17.740	0.33	17.792	0.03
	0.05752	9.775	9.808	-0.34	9.766	0.09
	0.11109	6.806	6.777	0.43	6.813	-0.10
	0.16978	5.199	5.160	0.75	5.195	0.08
	0.22164	4.149	4.234	-2.05	4.162	-0.31
270°	0.07621	8.660	8.635	0.29	8.656	0.05
	0.20960	5.397	5.406	-0.17	5.392	0.09
	0.37933	4.064	4.057	0.17	4.068	-0.10
	0.56965	3.297	3.287	0.30	3.295	0.06
	0.76241	2.772	2.791	-0.69	2.776	-0.14
225°	0.55862	3.432	3.424	0.23	3.430	0.06
	1.30134	2.586	2.588	-0.08	2.584	0.08
	2.15143	2.182	2.181	0.05	2.183	-0.05
	3.06067	1.926	1.924	0.10	1.926	0.00
	3.99177	1.739	1.743	-0.23	1.740	-0.06