

平面棒材の有限変位問題における橋内積分解

名古屋工業大学 学生員 ○山下 時治

名古屋工業大学 正 員 後藤 芳顕

名古屋工業大学 正 員 松浦 聖

1. まえがき：軸方向力のみを受ける軸線の不伸張変形を仮定した平面棒材の有限変位問題の解が、橋内積分で表現されることは、古くから、エラスティカ問題の名で知られている。著者らは、平面棒材に関して、エラスティカの式より精度の高い軸線の伸張変形を考慮した一般の支配方程式を導き、これらの一般解を積分で表現されることをすでに一部示している。しかしながら、これらの積分は橋内積分のいわゆる標準形による表示までに至っていないので、エラスティカの解との対応がつきにくい。また、計算を行う場合にも通常の数値積分によらねばならず、収束解を得るには膨大な計算量が必要とするという問題を有している。

本報告では、精度の良い解を効率良く得るためと、標準形で表現されたエラスティカ問題の解との対応をつけるために、一般解を橋内積分の標準形へ変換する方法について検討し、さ5にその標準形による表現について考察を行う。

2. 解の積分表示：Table-1の支配方程式を文献2)の方法で積分すると、Fig-1で示される i 節点と $i+1$ 節点の物理量、いわゆる一般解が積分によってTable-2のように表わされる。ここで、物理量はすべて無次元化されており、添字 $i, i+1$ がそれぞれ対応する節点の諸量であることを示している。また、表中の関数 f の符号はモーメント M の正負と逆の符号をとる。

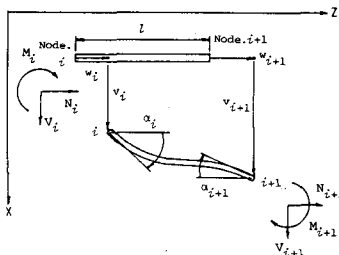


Fig-1 Physical Quantities

Theories	Equilibrium Equations	Boundary Conditions		Stress Resultants vs. Displacements
		Mechanical	Geometrical	
a) Finite Strains with Finite Displacements	$(N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha)' = 0$ $(N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha)' = 0$	$N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha = F_y$ $N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha = F_z$ $M = \bar{H}$	$v_0 = \bar{v}_0$ $w_0 = \bar{w}_0$ $\alpha = \bar{\alpha}$	$H = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $H = -E\bar{I}\alpha'$
b) Small Strains with Finite Displacements	$(N \sin \alpha + M' \cos \alpha)' = 0$ $(N \cos \alpha - M' \sin \alpha)' = 0$	$N \sin \alpha + M' \cos \alpha = F_y$ $N \cos \alpha - M' \sin \alpha = F_z$ $M = \bar{H}$	$v_0 = \bar{v}_0$ $w_0 = \bar{w}_0$ $\alpha = \bar{\alpha}$	$H = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $H = -E\bar{I}\alpha'$
c) Inextensional Finite Displacements (Elastica)	$(H \sin \alpha + M' \cos \alpha)' = 0$ $(N \cos \alpha - M' \sin \alpha)' = 0$	$N \sin \alpha + M' \cos \alpha = F_y$ $N \cos \alpha - M' \sin \alpha = F_z$ $M = \bar{H}$	$v_0 = \bar{v}_0$ $w_0 = \bar{w}_0$ $\alpha = \bar{\alpha}$	$\sqrt{g_0} = 1$ $H = -E\bar{I}\alpha'$

Remarks: The following notations are used throughout Tables presented as E = Young's Modulus, A = Cross Sectional Area, I = Moment of Inertia, N = Axial Stress Resultant, and $(F_y, F_z, \bar{H})$ and $(\bar{v}_0, \bar{w}_0, \bar{\alpha})$ = Prescribed Boundary Values

Table-2 Integral Expressions for the Solutions of Table-1

Integral expressions			
$1 = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{1}{f} d\alpha = \frac{w_{i+1} - w_i}{L} = \frac{1}{L} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{N \cos \alpha - M' \sin \alpha}{f} d\alpha = \frac{v_{i+1} - v_i}{L} + \frac{1}{L} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{N \sin \alpha + M' \cos \alpha}{f} d\alpha$			
$A_{i+1} = -A_i - \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{1}{f} (B_2 \sin \alpha - C_2 \cos \alpha) d\alpha$ $B_{i+1} = -B_i$ $C_{i+1} = -C_i$			
Note	Finite Strains with Finite Displacements	Small Strains with Finite Displacements	Inextensional Finite Displacements
f	$\pm \{A_i^2 + 2B_i(C - C_i) + C_i^2(s - s_i)\}$ $\frac{B_i^2 - C_i^2}{2Lr^2} (s_2 - s_i) - \frac{B_i^2 - C_i^2}{2Lr^2} (c_2 - c_i) \}^{1/2}$	$\pm \{A_i^2 + 2B_i(C - C_i) + 2C_i^2(s - s_i)\}^{1/2}$	$\pm \{A_i^2 + 2B_i(C - C_i) + 2C_i^2(s - s_i)\}^{1/2}$
k	$\sqrt{g_0}$	$\sqrt{g_0}$	1

Remarks: $\frac{M_i}{EI} = A_i$, $\frac{N_i}{EI} = B_i$, $\frac{V_i}{EI} = C_i$, L : Slenderness ratio, $c = \cos \alpha$, $c_i = \cos \alpha_i$, $s = \sin \alpha$, $s_i = \sin \alpha_i$, $s_2 = \sin 2\alpha$, $c_2 = \cos 2\alpha$, $s_2 = \sin 2\alpha_i$, $c_2 = \cos 2\alpha_i$, $\sqrt{g_0} = 1 - (B_i C - C_i^2)/Lr^2$, L : length of beam element $i, i+1$ before deformation

Table-3 The Three Normal Forms of the Elliptic Integrals

The normal elliptic integral of the first kind
$F = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$
The normal elliptic integral of the second kind
$E = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}} du$
The normal elliptic integral of the third kind
$\Pi = \int_0^x \frac{du}{(1-nu^2)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$

3. 楕円積分による解の表現: Table-2の積分を楕円積分の標準形に変換する。このとき、すべての積分形は有限ひずみの積分形を一部省略することにより得られるのでこの有限ひずみの場合について楕円積分への変換方法を示す。有限ひずみの積分形は一般に次式によって表わすことができる。

$$\int_{d_0}^{d_{i+1}} R[c, s, cs, c^2, s^2] / \sqrt{a_0 + a_1 c + a_2 s + a_3 c^2 + a_4 cs + a_5 s^2} dd \quad (1)$$

$a_0 \sim a_5$: Table-2の無次元量で表わされる定数, c, s : Table-2の脚注参照。

$R[a, b, c, \dots]$: $a, b, c, \dots$ による有理関数

式(1)を変数変換 $x = \pi a m \frac{d}{2}$ を行うことにより、次のように表す。

$$\int_{x_0}^{x_{i+1}} R[x] / \sqrt{b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4} dx \quad (2)$$

$b_0 \sim b_4$: $a_0 \sim a_5$ の線形結合によって表わされる定数

式(2)を文献3)に示される方法でTable-3に示す楕円積分の標準形へ変換を行う。Table-2に現われる積分に対して具体的に標準形で表わすと次のようになる。

$$\int_{d_0}^{d_{i+1}} 1/f dd = e_1 F, \int_{d_0}^{d_{i+1}} (c-1)/f dd = e_2 F + e_3 \Pi + e_4 S, \int_{d_0}^{d_{i+1}} s/f dd = e_5 F + e_6 \Pi + e_7 S \quad (3-a-d)$$

$$\int_{d_0}^{d_{i+1}} c(Bis - Cic)/f dd = e_8 F + e_9 \Pi + e_{10} S \quad S: \text{初等関数の積分} \quad e_i: \text{変換の際現われる定数}$$

ここで、変形前の軸線直角方向力が零のとき($C_0=0$)は、式(3-c,d)は $\int_{d_0}^{d_{i+1}} s/f dd = e_{11} S, \int_{d_0}^{d_{i+1}} c(Bis - Cic)/f dd = e_{12} S$ のように簡単になる。

ところで、変形前の軸線方向力(B_0)だけを考えた軸線不伸張の場合、異なる変数変換 $\sin \frac{d}{2} = \sin \frac{d_0}{2} \sin \varphi$ により積分は以下のような標準形で表わされることはよく知られている。

$$\int_{d_0}^{d_{i+1}} 1/f dd = e_{13} F, \int_{d_0}^{d_{i+1}} (c-1)/f dd = e_{14} F + e_{15} E, \int_{d_0}^{d_{i+1}} s/f dd = e_{16} S, \int_{d_0}^{d_{i+1}} (Bis - Cic)/f dd = e_{17} F + e_{18} E + e_{19} S \quad (4-a-d)$$

一方、同じ条件のもとで、式(1)~(3)に示す変換を用いると式(3)は、

$$\int_{d_0}^{d_{i+1}} 1/f dd = e_{20} F, \int_{d_0}^{d_{i+1}} (c-1)/f dd = e_{21} F + e_{22} \Pi + e_{23} S, \int_{d_0}^{d_{i+1}} s/f dd = e_{24} S, \int_{d_0}^{d_{i+1}} (Bis - Cic)/f dd = e_{25} F + e_{26} \Pi + e_{27} S \quad (5-a-d)$$

となり、式(4-b,d)と式(5-b,d)との表示が異なっている。これら、変換の違いにより、第3種楕円積分は異なる標準形で表わされることがわかる。これに関連して、数値計算を行う際、第3種楕円積分は第1種および第2種楕円積分に比べて非常に複雑になるので、可能な5倍他の標準形へ適当な変換を行うことが望ましい。微小ひずみおよび軸線不伸張の一般の場合はこの変換が可能となり、 $\sin d = \sin(\varphi + \beta)$ (ここで、 $\sin \beta = C_0 / \sqrt{B_0^2 + C_0^2}$, $\cos \beta = B_0 / \sqrt{B_0^2 + C_0^2}$) なる変数変換により、次のような第3種楕円積分を含まない型で表わされる。

$$\int_{d_0}^{d_{i+1}} 1/f dd = e_{28} F, \int_{d_0}^{d_{i+1}} (c-1)/f dd = e_{29} F + e_{30} E + e_{31} S \quad (6-a-d)$$

$$\int_{d_0}^{d_{i+1}} s/f dd = e_{32} F + e_{33} E + e_{34} S, \int_{d_0}^{d_{i+1}} c(Bis - Cic)/f dd = e_{35} F + e_{36} E + e_{37} S$$

4. 数値計算: 数値積分で一般によく用いられる Simpson の公式を用いた場合と、楕円積分を用いた場合の精度の比較をFig-2に示す。縦軸には、それぞれの方法によって求めた鉛直変位の比を用いて表わしている。

(参考文献) 1) Timoshenko S.P. and J.M.Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd. Ed. McGraw-hill, 1961. 2) 西野・倉方・後藤: 一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論, 土木学会論文報告集第237号 3) 安藤四郎: 楕円積分楕円関数入門, 日新出版

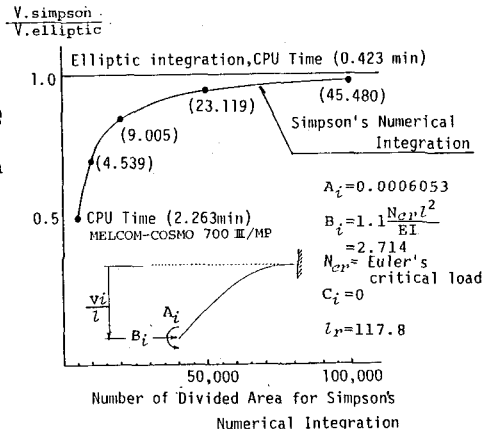


Fig-2 Accuracy of Numerical Integration of Finite Strains with Finite Displacements