表面応力評価による構造物の形状決定

信州大学工学部　正会員　○　大上　俊之
同　　上　正会員　　三井　康司
同　　上　正会員　　草間　孝志

1．まえがき

構造物の形状決定問題に有限要素法を利用する方法は，対象物の領域全体を要素分割するため，表面形状を摸索する過程で要素形状がひずむなどの弊害が生じ，計算の途中で要素分割を修正する必要がある。これに対し境界要素法を利用する方法は，応力解析の手段として境界上の離散化のみですむため，領域内の要素形状がひずむという問題が生じない利点がある。

境界要素法により表面応力を正しく算出するには境界表面上に節点を多くとる必要がある。一方，表面応力評価法による構造物の形状決定問題における設計変数としては，従来表面上の座標値がとられている。[1,2] したがって，設計変数が境界表面上の節点の座標値のみとはいえ，節点を多くとれば設計変数も大となり，最適化計算の効率が低下する。また，この方法は節点の座標を独立に移動させるため，初期形状，目的応力の値によっては，境界上のある点だけが大きく変化し，そのため境界が円滑でなくなることによって，応力計算に誤差を伴う危険性がある。この点を解決する手段として境界形状を多項式で近似する方法[3]がある。しかし，この場合，構造物の形状は多項式で規定された制約の中での解となる。

本文は，境界表面の形状を有限複素フーリェ級数で表し，複素フーリェ係数を設計変数として最適化計算の効率の向上を図るとともに，級数の項数を適宜選択することによって，境界表面上の節点の座標値を設計変数とする方法をも包含した方法について述べたものである。

2．境界の有限複素フーリェ級数による表現

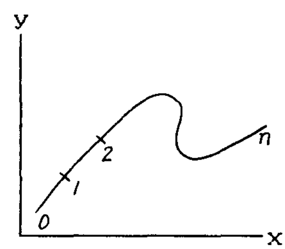
構造物の形状を表す平面を複素平面とし，節点 j の座標値を

$$z_j = x_j + i\, y_j \qquad (1)$$

とする。ここに，$i=\sqrt{(-1)}$。いま，ベクトル w_j を次式のように

$$w_j = z_{j+1} - z_j \qquad (\, j=0,1,2,3,\cdots,n-1 \,) \qquad (2)$$

定義する。上坂はwを「かたちの不変表現」とよんでいる。[4] wのフーリェ変換をC_k とし，逆変換をw_j とすると，式(3)，(4) を得る。



図－1

$$C_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} w_j\, \phi_{kj} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1) \quad (3), \qquad w_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k\, \phi^*_{jk} \quad (j=0,1,2,\cdots,n-1) \quad (4)$$

ここに，　$\phi_{kj} = \exp\left(-2\pi i \frac{kj}{n}\right)$，　$\phi^*_{jk} = \phi^*_{kj} = \phi_{kj}$の共役複素数　である。

式(4) はnを偶数とすると式(5) のように変形され，節点 j の座標値　z_j は式(2) より式(6) となる。

$$w_j = C_0 + \sum_{k=1}^{n/2-1} (C_K\, \phi^*_{kj} + C_{n-k}\, \phi_{kj}) + (-1)^j\, C_{n/2} \quad (5), \qquad z_j = z_0 + \sum_{r=0}^{j-1} w_r \quad (6)$$

3．目的応力とフーリェ係数の探索

形状を変化させたい境界上の点 j の応力をσ_j とし，その点の目的応力をσ_{oj}とすれば，目的関数式(7) を満足するように表面形状

$$\Sigma\, (\sigma_j - \sigma_{oj})^2 \rightarrow \min \quad (7)$$

（フーリエ係数）を決定すればよい。式(6) で $j=n$ とおくと，$C_0=z_n-z_0$ となり，C_0 は形状を変化させたい境界の両端の座標値によって定まる。したがって，２個の複素数 z_0，z_n と（$n-1$）個の複素フーリエ係数（C_1，C_2，…，C_{n-1}）を設計変数として，式(7) を計算すれば節点０～nの形状が決定される。通常は，これらの内，例えば節点０は指定された点を通らなければならない等の条件により，設計変数は少なくなる。なお，形状を決定しようとする境界が閉曲線の場合には，$z_n=z_0$ より，$C_0=0$ となる。式(5) はkが n/2に近づくにしたがい，激しく振動することがフーリエ級数の性質から知られている。したがって，形状の概略を掴むためにはn/2 よりも小さい Nを指定し，N 以上の項を無視すれば，少ないフーーリエ係数で近似した境界の形状が得られる。また，

$$w_j=u_j+i\,v_j \tag{8}$$

式(6) に式(5) を代入し，式(8) を用いれば式(9),(10)を得る。

$$x_j=x_0+j\,u_0+\sum_{k=1}^{n/2-1}\left[\frac{\sin(jk\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}\Big[(u_k+u_{n-k})\cos[(j-1)k\pi/n]-(v_k-v_{n-k})\sin[(j-1)k\pi/n]\Big]\right]+\beta u_{n/2} \tag{9}$$

$$y_j=y_0+j\,v_0+\sum_{k=1}^{n/2-1}\left[\frac{\sin(jk\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}\Big[(u_k-u_{n-k})\sin[(j-1)k\pi/n]+(v_k+v_{n-k})\cos[(j-1)k\pi/n]\Big]\right]+\beta v_{n/2} \tag{10}$$

ここに，$\beta=1$（jが奇数），$\beta=0$（jが偶数）である。

いま，あるステップにおけるCの変化量をΔCとすると，式(9),(10)から次のことがいえる。

（A） 節点jと節点0との水平距離（x_j-x_0）を一定に保つように形状を変化させるには，
$\mathrm{Real}(\Delta C_0)=\mathrm{Real}(\Delta C_{n/2})=0$，　$\mathrm{Real}(\Delta C_k)=-\mathrm{Real}(\Delta C_{n-k})$，
$\mathrm{Imag}(\Delta C_k)=\mathrm{Imag}(\Delta C_{n-k})$ 　を満足するようにCを変化させればよい。

（B） 節点jと節点0との鉛直距離（y_j-y_0）を一定に保つように形状を変化させるには，
$\mathrm{Imag}(\Delta C_0)=\mathrm{Imag}(\Delta C_{n/2})=0$，　$\mathrm{Imag}(\Delta C_k)=-\mathrm{Imag}(\Delta C_{n-k})$，
$\mathrm{Real}(\Delta C_k)=\mathrm{Real}(\Delta C_{n-k})$ 　を満足するようにCを変化させればよい。

このような条件を課せば，探索する未定係数は更に減少する。

４．むすび

以上，境界要素法による構造物の形状決定問題に，複素フーリエ係数を応用する方法について述べたが，得られた主な結論は次の通りである。節点座標値を設計変数とする従来の方法に比べ，フーリエ級数の項数を少なくとることにより設計変数を減少させることができ，最適化計算の効率の向上を図ることができる。特に，形状が定まらない初期の段階では少ない設計変数を用いて概略の形状を把握し，順次，設計変数を増やしていけばよい。表面形状の最適化問題では，変更後，境界が重なり合う等の不合理が生ずる場合がある。この点について本文では，交差しない幾つかの閉曲線で囲まれた領域内部の巻き数（Winding Number）N_w は $N_w=1$ でなければならないという性質[5]を利用した。内部点を限りなく境界上に近づければ境界上でも $N_w=1$ が成立する。計算にあたっては，常に巻き数が１になることを確認しながら行った。

なお，計算例については当日報告する予定である。

５．参考文献

1)鳶，山地，”周辺積分有限要素法とその応用”日本機会学会論文集，46-412，1980.

2)大上，草間，”境界要素法を用いた応力評価による形状決定問題”，中部支部講演概要集，1984.

3) Francavilla,A.,etal, J.Strain Analysis,70-2,1975.　4)上坂，”かたちのスペクトル分析”，数理科学，No.246,1983.　5)本間，”新しいトポロジー”，1973，または，野口，”不動点定理”，共立，1980