単純化された相関流量系列による利水用貯水池の機能評価の解析

名古屋工業大学　正員　○長尾正志　学生員　羽鳥明満、浅野和広

1．研究の経緯とねらい

流量時系列に自己相関性を導入して、利水用貯水池の機能評価を試みてきたが、ここでは、流量時系列や貯水池容量の影響が、直観的に把握できるように、単純化した流量系列を用いる。これには、Phatarfod の３状態量の二項分布および単位目標放流量の成果を利用する。なお、著者が導出している関係式で、二項分布変量の上限 r を２，目標放流量 M を単位にとるとこの結果と合致することが証明できる。以下、この単純化された流量系列を使った、主として渇水時の利水用貯水池の解析法と、諸要因による影響を概述する。

2．相関流量系列の単純化

2．1　３状態二項分布の基礎式

水不足の状態での流量系列の特性が、顕著な持続性と少流量部の多発性であることを勘案して、離散的表現により、これを３状態量の相関二項分布で表現する。たとえば、時刻 t の流量を X_t とすると、あい続く流量 X_t, X_{t+1} の条件付分布、周辺分布を表－1に示す。なお、この場合、平均流量 $E(X_t)=2a$、自己相関係数 $Corr(X_t, X_{t+1})=\rho$ である。

ITEM	RANGE OF VARIABLES $i,j=0,1,2$
$p_{ij} = P_r\left[X_{t+1}=j \mid X_t=i\right]$	$\sum_{s=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{s}\binom{-i+2}{j-s} \{a(1-\rho)+\rho\}^s \times \{1-a(1-\rho)\}^{s+2-i-j} a^{j-s} (1-a)^{i-s} (1-\rho)^{i+j-2s}$
$p_i = P_r\left[X_t=i\right]$	$\binom{2}{i} (1-a)^{2-i} a^i$

表-1　3状態二項分布の条件付分布、周辺分布

2．2　流量分布の具体的表現

つぎに、理解を容易にするために、以下に周辺分布、条件付分布の具体的な形を図示しておく。

i)　周辺分布　　図－1のように、$a=0$ では、0状態のみが出現する。a が増すに伴って、次第に１、さらに２の状態が出現してくる。$a=1/2$ では、対称形となり、さらに a が増すと、$a=1/2$ に関して対称的な関係で、変化していく。普通渇水時では、$a \ll 1/2$ である。

ii)　条件付分布　　図－2に、$a=0.3$，$\rho=0.7$ の場合の条件付分布の形を示す。当然 ρ が増すと、$i=j$ の周辺に集中した出現となる。

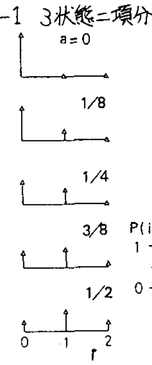


図-1 周辺分布

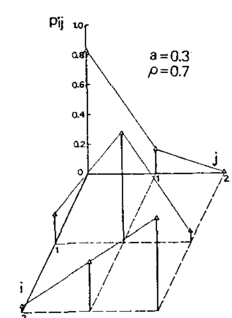


図-2　条件付分布

3．貯水量の定常分布とその特性

3．1　貯水量定常分布の基礎式

i)　空水到達の定常確率　　初期貯水量 $u=Z_0$ から出発して満水することなく空水に至る定常確率 P_u は、３状態二項分布流量に対して、以下の式で与えられることが酔歩理論より判っている。ただし貯水池容量は K、目標放流量は単位とする。

$$P_u=\frac{\{(1-a)/a\}^2\, x_0^{K-1}-[(1-a)(1+\rho)/\{1-a(1-\rho)\}]^2\, x_0^{u}}{\{(1-a)/a\}^2\, x_0^{K-1}-1}\quad (a \neq 1/2) \qquad (3.1)$$

$$P_u=\frac{K-u+\rho/(1-\rho)}{K+2\rho/(1-\rho)}\quad (a=1/2) \qquad (3.2)$$

ただし、$x_0=[\{1-a(1-\rho)\}/\{\rho+a(1-\rho)\}]^2$　　(3.3)　　これら P_u から、貯水量の定常分布 $V_i = Pr\{Z=i\}$ は、次式で求められる。　$V_0=P_{K-1}$，$V_{K-1}=1-P_1$，$V_i=P_{K-1-i}-P_{K-i}$

ただし、i＝１、２、…、K－３、K－２　したがって、V_iは、以下のように求まる。

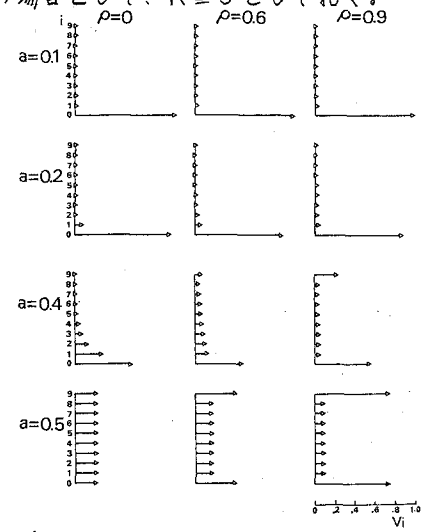
まず、$a<1/2$に対して、i＝１、２、…、K－２　として、

$$V_0=\gamma\frac{(1-a)^2(1-2a)(1+2a\rho)}{a^2\{1-a(1-\rho)\}^2}x_0^{K-1} \qquad (3.4) \qquad V_i=\gamma\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2(x_0-1)x_0^{K-1-i} \qquad (3.5)$$

$$V_{K-1}=\gamma\left[\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2x_0-1\right],\ \text{ただし}\quad \gamma=\frac{1}{\{(1-a)/a\}^2x_0^{K-1}-1} \qquad (3.6)$$

となる。なお、貯水池容量Kとしては、(3·5)式が意味を持つ場合として、K≧３としておく。

３．２　定常分布の一般的特性　貯水量定常分布の特性を知るために、K＝10、M＝１とし、a、ρを種々に変化させた場合のV_iを、図－３に示す。これより、つぎのような特性が認められる。　イ）まずaが減少すれば渇水傾向、aが増せば満水傾向を帯びる。　ロ）$\rho=0$ならば、貯水量は、貯水量状態iとともに等比級数的に変化する。ハ）$\rho\neq0$なら、空水、満水状態（i＝０、K－M）以外では、等比級数的であるが、両極端の状態での確率は不連続的に大きくなる。　ニ）ρが１に近くなるにつれて、中間状態の確率は減じ、一様化するのに比し、空水、満水状態の確率は急激に増大する。　ホ）$a=1/2$では、V_iはiに関して対称となる。



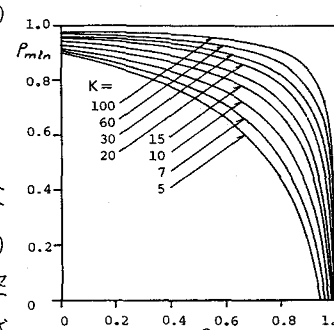
図－３　各種a,ρに対する貯水量定常分布

３．３　空水確率の影響要因との関連　利水問題で重要な空水確率について考察する。

i）流量の自己相関係数との関連　V_0のρによる変化を知るために、$dV_0/d\rho=0$より、次式をえる。　(3.7)

$$(1+\rho)\left[(1-a)^2\left\{\frac{1-a+a\rho}{a+(1-a)\rho}\right\}^{2K-2}-a^2\right]\{a+(1-a)\rho\}+(K-1)(2a-1)(1+2a\rho)=0$$

所与のρ、aについて、上式で求まるρまでは、V_0は単調減少し、以後は単調増加であるから、上式のρはV_0の最小値を与えることとなる。このρをρ_{min}として図－４に示す。一般に想定される渇水時の少ない期待流量および目標放流量に対して大きい貯水池容量では、空水確率（需要に対応できない確率）は自己相関係数の増加とともに減るとみてよい。



図－４　任意のa,ρに対するρ_{min}

ii）貯水量期待値との関連　貯水池の利水効果は、貯水量期待値で議論されることも多いので、これと空水確率との関連を調べる。なお、貯水量期待値は　$E(V)=\sum_{i=1}^{K-M}i\cdot V_i$,（M＝１）である。両者の関連は、つぎのようである。

$$E(V)=\frac{a^2(1+\rho)\{1-a(1-\rho)\}^2}{(1-2a)^2(1-\rho)(1+2a\rho)}V_0-\gamma\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2\left[\frac{\{\rho+a(1-\rho)\}^2}{(1-\rho^2)(1-2a)}+K\right] \qquad (3.8)$$

ところで、普通　$x_0\gg1$、かつK≫１と考えてよいとすると、次式の近似式が成立つ。

$$E(V)/V_0\fallingdotseq a^2(1+\rho)^2/\{(1-2a)(1+2a\rho)\}:\ \text{indep. of K} \qquad (3.9)$$

すなわち、貯水池容量に着目して利水機能の評価をしようとする場合、E(V)を使っても本質的に差がないことになる。