

信州大学 正員 荒木 正夫 正員 富所 五郎
 学生員 高橋 智嗣 学生員 大桑 潔

1. 概要

湖のセイシュの固有振動周期を求めることは、湖の流動特性を把握する上において、極めて重要である。一層状態におけるセイシュについては、非線型項・粘性項などを除いた Reynolds 運動方程式と連続の式から導ける二次元の波動方程式を、有限要素法によって定式化し、固有値問題に帰着させることにより、固有振動周期を求める方法が提案されている¹⁾。本研究は、この方法を発展させ、二層状態にあるセイシュの固有周期を求めるための数理モデルを開発し、実際に野尻湖への適用をはかることにより、その実用性の検討を行うものである。

2. 基礎方程式

上層・下層のそれぞれに対し、Reynolds 運動方程式と連続の式をたて、 $-d$ から z まで積分すると、

$$\bullet \text{ 上層; } \frac{\partial u_1}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \dots (1), \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \dots (2), \quad \frac{\partial(\zeta+d)}{\partial t} + d \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0 \dots (3)$$

$$\bullet \text{ 下層; } \frac{\partial u_2}{\partial t} + g \left\{ \varepsilon \frac{\partial(\zeta+d)}{\partial x} - \frac{\partial d}{\partial x} \right\} = 0 \dots (4), \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + g \left\{ \varepsilon \frac{\partial(\zeta+d)}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial y} \right\} = 0 \dots (5)$$

$$\frac{\partial(-d)}{\partial t} + (h-d) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = 0 \dots (6)$$

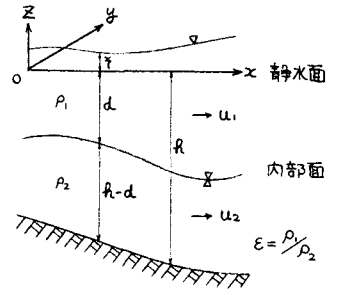


図-1 記号の説明

となる。ここでは、流速は鉛直方向に一定、渦動粘性項・非線型項は無視している。また、岸の法線方向の流速は零、 $d = \bar{d} + \Delta d$ とし、 $\bar{d} \gg \zeta, \bar{d} \gg \Delta d$ と仮定している。さらに $P = \rho g(\zeta - z)$ としている。(3)式を z で偏微分した式に、(1)式を x で偏微分した式と(2)式を y で偏微分した式を代入し、また(6)式を z で偏微分した式と(5)式を y で偏微分した式を代入すると、

$$\frac{\partial^2(\zeta+d)}{\partial t^2} - g \bar{d} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0 \dots (7), \quad \frac{\partial^2(-d)}{\partial t^2} - g(h-\bar{d}) \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - (1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} \right) \right\} = 0 \dots (8)$$

となる。つぎに(8)式を(7)式に代入し、 $\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}$ を消去すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g(h-\bar{d}) \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - (1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} \right) \right\} - g \bar{d} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0 \dots (9)$$

ここで、(8)・(9)式が二層状態にあるセイシュを支配する波動方程式である。さらに、時間項を消去するために、 $\zeta(x, y, t) = \beta(x, y) \cos \sigma t$, $d(x, y, t) = r(x, y) \cos \sigma t$ とおき、(8)式と(9)式に代入すると

$$-\sigma^2 \beta - \left\{ (h-\bar{d}) \varepsilon + \bar{d} \right\} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + (h-\bar{d})(1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) = 0 \dots (10)$$

$$\sigma^2 r - (h-\bar{d}) \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + (h-\bar{d})(1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) = 0 \dots (11)$$

が得られる。ここに $\lambda^2 = \frac{\sigma^2}{g}$ であり、また $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ である。(Tは振動周期) 次に、(10)・(11)式に $\beta \cdot r$ の近似関数として $\beta = N_i \beta_i, r = N_i r_i$ を代入し、重み関数 N_i をかけ要素内で積分する。Green-Gaussの定理を用いて一階の微分に下げ、流速の境界条件を入れると、(10)・(11)式は次の様に離散化される。

$$-\lambda^2 \int_S N_i N_j dS \cdot \beta_i + \left\{ (R-\bar{d})\varepsilon + \bar{d} \right\} \int_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS \beta_j - (R-\bar{d})(1-\varepsilon) \int_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS \cdot r_j = 0 \quad \dots (12)$$

$$\lambda^2 \int_S N_i N_j dS \cdot r_i + (R-\bar{d})\varepsilon \int_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS \beta_j - (R-\bar{d})(1-\varepsilon) \int_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS \cdot r_j = 0 \quad \dots (13)$$

これらを全部の要素について考え、行列式で表すと、

$$\lambda^2 \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} \quad \dots (14)$$

となり、一般的な固有値問題に帰着される。

3. 計算結果と考察

(14)式の右边が非対称の為、標準的なプログラムライブラリーは使用出来ない。そこで(14)式左辺の固有ベクトル及び固有値の並んだ対角マトリックスを用いることにより、ある一つの行列の固有値を求める形に変形した後計算を行った。まず、幅1 km、長さ20 km、深さ100 m、内部面までの深さ50 m、 $\rho_1=0.9, \rho_2=1.0$ とした長方形水路にこのモデルを適用した。ここで空間のスケールは、途中の行列計算において over-flow を生じさせないように kmの単位を用いた。その最大周期は、 $T=7969.7\text{sec}$ となり、解析解

$$T = \frac{2L}{\sqrt{gH}} \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left\{ 1 - 4 \frac{(R-\bar{d})}{R} \frac{\bar{d}}{R} (1-\varepsilon) \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{より得られる内部面の周期}$$

7976.9secとほぼ一致した。この結果を踏まえ、図-2に示す水温分布にある二層状態の野尻湖への適用を図った。岸付近では、図-3に示すように、一層の水域の底部に薄い層を設け、全水層を二層として取り扱い、薄い下層の密度は上層のそれと等しくしている。この時、 $\rho_1=0.99902, \rho_2=0.99904$ 、内部面までの距離を15 mとして計算すると、 $T_1=19063\text{sec}, T_2=14526\text{sec}$ が得られた。24時間にわたるセイシュ観測(1983年10月20-21日)の結果をMEM解析(フィルタ長=400)すると、 $T_1=14903\text{sec}, T_2=479\text{sec}, T_3=350\text{sec}$ となり、最大周期 T_1 は内部面のオ2モードであると考えられる。また、非定常二層エワマンタイプモデルにおいて、 $\rho_1=0.9986, \rho_2=0.9999$ 内部面までの距離を12.25 mとした時の内部面の周期16500sec に対し、同様の条件における本解析法からは $T=16950\text{sec}$ が得られた。さらに二層セイシュモデルにおいて $\rho_1=\rho_2$ とすると、一層モデルの解と一致し、一層状態での解析も可能であることが明らかとなった。

以上より、本解析法は、二層状態にある湖のセイシュの周期をある程度正確に求められ、実用性に富むものといえる。

参考文献

- 1) C.Taylor, B.S.Patil and O.C.Zienkiewicz: Harbour Oscillation; A Numerical Treatment for Undamped Natural Modes, Proc. Inst. Civ. Eng., vol. 43, 1969.
- 2) 野口; 湖の風成流に関する基礎的研究, 信州大学修士論文, 1982

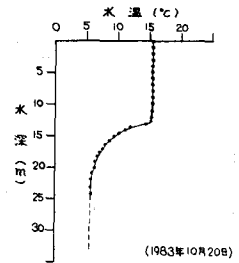


図-2 水温分布

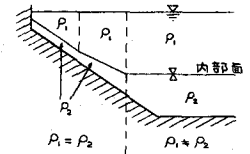


図-3 境界の取扱