II—21

ソリトン分解能に及ぼすモード間干渉の影響について

岐阜大学　正会員　安田孝志
岐阜大学　○学生会員　永田真人

1．緒　言　著者らは，浅海域における非線形不規則波浪である海岸波浪はソリトンを素励起とする動力学的構造，すなわちソリトン構造を持つとの観点から，ソリトンモードに基づくスペクトル理論を提案し，広範な海象下にある海岸波浪においては一般に相互干渉を無視できることを明らかにして来た。しかしながら，この理論，すなわちソリトンスペクトル理論を完全な力学理論として確立し，さらに，ソリトンスペクトル分布を不偏統計量とした海岸波浪の統計理論を展開するには，ソリトン間の相互干渉の評価が不可欠となる。こうしたことから，著者らはK-dV方程式の厳密解を基に相互干渉を考慮した理論を展開したが，この理論が広く実用に供されるには計算上の労力軽減などが必須となることが明らかとなった。そこで，ここでは，厳密解とモード間干渉を無視した漸近解との比較を行い，モード間干渉の影響を明らかにすると同時に，ソリトンの波峯間隔が一定値以上あれば，厳密解が漸近解と一致することを示す。

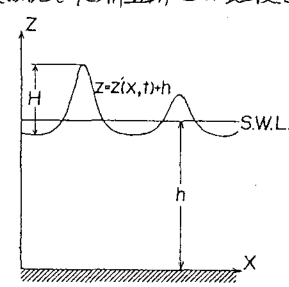

図-1　座標および記号

2．K-dV方程式の漸近解と厳密解との比較　座標および記号を図-1のように定めれば，非回転流体場での流体力学の基礎方程式からG-M変換によってK-dV方程式は次式のように導かれる。

$$\eta_\tau + 3\eta\eta_\xi/2 + \eta_{\xi\xi\xi}/6 = 0 \qquad (1)$$

ここに，$\varepsilon\eta = z^*/h$, $\xi = \varepsilon^{1/2}(x^* - t^*)$, $\tau = \varepsilon^{3/2}t^*$, $x^* = x/h$, $t^* = t\sqrt{g/h}$, および $\varepsilon = (h/L)^2$ である。さらに，遠方場でのじょう乱を仮定し，水面変動 η は平均水面周りの波形の連続条件を満足するものとすれば，式(1)は次式の双1次形式に書き換えられる。

$$P = [D_\xi D_\tau - (3\eta_0/2)D_\xi^2 + (1/6)D_\xi^4]F\cdot F = 0 \qquad (2)$$

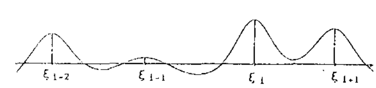

図-2　うねり性海岸波浪の波形

ここに，

$$\eta = (4/3)\partial_{\xi\xi}\log F - \eta_0 \ , \ \int_{-\infty}^{\infty}\eta\, d\xi = 0 \ , \ D = (\partial_\xi - \partial_{\xi'})|_{\xi=\xi'} \qquad (3)$$

いま，式(2)の解として次式を仮定する。

$$F_a = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + f_i) \quad , \ f_i = \exp\{B_i(\xi - C_i\tau - \delta_i)\} \qquad (4)$$

ここに，

$$(4/3)\,\partial_{\xi\xi}\log(1 + f_i) = A_i\,\mathrm{sech}^2\{(\sqrt{3A_i}/2)(\xi - C_i\tau - \delta_i)\} \quad , \ B_i = \sqrt{3A_i} \qquad (5)$$

であり，A_i；ソリトンの固有値，C_i；$\sqrt{g/h}$ の動座標上での各ソリトンの波速，および δ_i；ソリトンの位相定数。ここで，式(4)を式(2)に代入し，波速 C_i として，$C_i = A_i/2 - 3\eta_0/2$ を仮定すると，式(2)は次式に書き換えられる。

$$P = 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} S_{ij}\,\partial_\xi^2 f_i\,\partial_\xi^2 f_j \quad , \ S_{ij} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n)^2/(1 + f_i)^2(1 + f_j)^2 \qquad (6)$$

いま，図-2に示されるような波形が $\tau = \tau_0$ において与えられたとし，ソリトンの波峯の座標を ξ_i としたとき，各ソリトンの波峯間隔に関して，

$$|\xi_i - \xi_j| > \sigma \ , \quad e^{-\sigma} \ll 1 \ , \ -\infty < \cdots < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < +\infty \qquad (7)$$

の関係が成立するとすれば，$P\approx 0$とできる。すなわち，式(4)は，上式の関係が成立する場合に波動解になると言える。一方，式(2)の厳密解F_eは次式によって与えられる。

$$F_e=\det|F_{mn}|\quad,\ F_{mn}=\delta_{mn}+2B_m f_m/(B_n+B_m)\ ,\ 1\leq n,m<+\infty \tag{8}$$

ここに，δ_{mn}はKroneckerデルタである。$\tau=\tau_0$において式(7)が満足されるならば，A_iの固有値を持つソリトンに着目すると，漸近的に次式の関係が導かれる。

$$\left.\frac{F_e}{F_a}\right|_{\substack{\xi=\xi_i\\ \tau=\tau_0}}\approx\left\{\frac{(B_1-B_2)\cdots(B_1-B_{i-1})(B_2-B_3)\cdots(B_{i-2}-B_{i-1})}{(B_1+B_2)\cdots(B_1+B_{i-1})(B_2+B_3)}\right\}^2\left[1+\left\{\frac{(B_1-B_i)(B_2-B_i)\cdots(B_{i-1}-B_i)}{(B_1+B_i)(B_2+B_i)\cdots(B_{i-1}+B_i)}\right\}^2 f_i\right]\Big/(1+f_i) \tag{9}$$

ここで，

$$\prod_{\ell=1}^{i-1}(B_\ell-B_j)^2/(B_\ell+B_i)^2=\exp(-B_i\Delta_i),\quad \Delta_i=-(1/B_i)\log\prod_{\ell}^{i-1}(B_\ell-B_i)^2/(B_\ell+B_i)^2 \tag{10}$$

と置けば，元のK-dV方程式における厳密解η_eと漸近解η_aとの差は，次式で与えられる。

$$\eta_e-\eta_a=\partial_{\xi\xi}\log F_e/F_a=\partial_{\xi\xi}\log\{(1+f_i^*)/(1+f_i)\}\quad,\ f_i^*=\exp\{B_i(\xi-C_i\tau-\delta_i-\Delta_i)\} \tag{11}$$

以上の漸近関係は任意のソリトンに関して成立することから，式(11)はξの全域において成立し，厳密解と漸近解との差，すなわち相互干渉の影響は，厳密解に生じた位相変化Δ_iのみであり，漸近解の位相定数を$\delta_i^*=\delta_i+\Delta_i$としておけば，漸近解は厳密解に一致する。したがって，前述の図-2に示すような波形が$\tau=\tau_0$において与えられたとき，これをソリトン分解するには，$\tau=\tau_0$の状態を漸近状態として漸近解を用い，δ_i^*を波形記録から直接決定し，固有値A_iのみを波形との適合条件から決定すればよい。こうした場合に厳密解を用いてソリトン分解するには，式(10)によってΔ_iを計算し，波形記録から定まるδ_i^*を補正しなければならず，漸近解を用いる場合に比べて無意味な計算を強いられることになる。したがって，式(7)が満足されるような場合には，式(4)の漸近解を用いてソリトン分解した方が合理的と言えよう。これに対し，波峯が接近して式(7)の関係が満足されなくなっている場合には，明らかに漸近解の適用は精度の低下を招くため，厳密解の適用が必須となる。しかしながら，こうした場合には，位相変化を式(10)によって評価することは最早出来ないため，波形記録からδ_i^*を求め，さらにΔ_iの補正によって厳密解の位相定数δ_iを求めることは不可能となる。このため，A_iおよびδ_iを未知量として波形に対する適合条件を満足させねばならない。この種の計算の労力は未知量の数と共に急増するため，厳密解の適用を必須とする波形と漸近解でよいものとを区別してソリトン分解を行う方が合理的であろう。

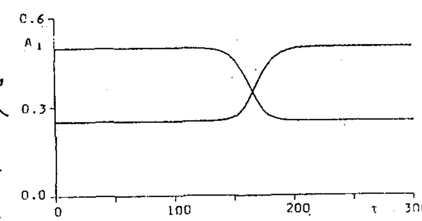

図-3　漸近解の固有値の変化

3．相互干渉の固有値に及ぼす影響　上述の区別を行うには，式(7)のσの値を具体的に与える必要がある。波形のソリトン分解の目的は，固有値A_iを求め，ソリトンモードを確立することにあるため，相互干渉の過程における漸近解の固有値の変化を明らかにし，固有値の分解能とσの関係について検討する。図-3は，ソリトンの固有値A_iが$\frac{1}{2}$および$\frac{1}{4}$の場合の結果の1例であり，これから，$\sigma\approx 6.1$になると固有値の分解能の精度が95%程度に低下することがわかる。したがって，実用的にはこの程度のσを用いて厳密解の適用の必要性の有無を判断し，両者の併用によってソリトン分解を行えばよいだろう。

4．結　語　以上，漸近解と厳密解の関係を明らかにすると同時に，漸近解によるソリトン分解能に及ぼすモード間干渉の影響について若干の検討を行い，任意状態の海岸波浪に適用できるソリトンスペクトル理論の方向を示した。