

局在した海岸波浪のソリトンスペクトル理論

岐阜大学工学部 正会員 安田孝志
岐阜大学工学部 学生会員 三島豊秋

1. 緒言 すでに著者らは、非周期性波動であるソリトンを素励起としながら、そのensembleに対して波形の平均水面周りの連続条件を満足させることにより、1波ごとの独立性が顕著ではあるが、周期性波動としての特色を残している海岸波浪のソリトンスペクトル表示が可能となることを明らかにして来た。ソリトンを素励起とする不規則波の場合、ソリトンの伝播の基準面である波谷面と質量保存則との関係で意味を持つ平均水面との差は、波形の連続条件により、ensemble平均として計算されるため、遠方場でのソリトンを仮定すれば、これを定数として扱うことが可能となる。しかしながら、我々が実際に取り扱う海岸波浪は、有限観測時間のものであるため、これに対応した有限場でのソリトンスペクトル理論を必須とする。また、海岸波浪をソリトンスペクトル理論により統計力学的に取り扱い、その時系列特性をエントロピーによって評価するには、海岸波浪が有限個のソリトンから成る孤立系となっていることが必須となる。こうした観点からすれば、これまでの観測時間に対する擬似無限仮定ではなく、i) パワースペクトル法における周期性境界の仮定、あるいはii) ソリトンは観測域にのみ存在し、遠方場では波谷面は静水面に一致する局在波動場の仮定のいずれかに基づく展開が必要となる。海岸波浪に対して、いわゆる「再帰現象」を仮定することは無理があるため、ソリトンを素励起として周期性境界条件を満足させることは困難となる。

そこで、本研究では、これまでのソリトンスペクトル理論が抱えて来た有限場の海岸波浪との整合性の問題を解消すると同時に、時系列特性評価へのエントロピー理論の導入を可能とするため、上述のii)の仮定を基にして局在した海岸波浪のソリトンスペクトル理論を展開する。

2. 微分展開法による局在海岸波浪の波動方程式の誘導

非回転波動を考え、図-1のように座標および記号を定めれば、このときの波動に伴う水位変動 η が満足すべき波形の連続条件および局在条件は、それぞれ次式で与えられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty \text{ において } \eta \rightarrow 0 \quad (1)$$

これらの条件がソリトンを素励起とした海岸波浪によって満足されるには、ソリトンの基準面である波谷面がソリトンの伝播に伴って時空間的に変化することが必須となる。しかしながら、これによってこのときの波動方程式が複雑化することは望ましくないので、波谷面の変化を高次項として扱うために、微分展開法によって波動方程式を導く。

図-1の座標におけるこのときの基礎方程式は次式で与えられる。

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \phi_t + (\phi_x^2 + \phi_z^2)/2 + g\eta = 0|_{z=\xi+\eta}, \quad z\xi + z\xi'\phi_x - \phi_z = 0|_{z=\xi+\eta}, \quad \phi_z = 0|_{z=0} \quad (2)$$

ここで、 ϕ ；速度ポテンシャル、 z ；水位変動、および g ；重力の加速度である。ここで、変数および未知量に対して、次式のような変数展開を仮定する。

$$x_n = \varepsilon^{n-1/2} x_n, \quad t_n = \varepsilon^{n-1/2} t_n / \tau_n, \quad (n=1, 2, \dots), \quad \xi = z/\varepsilon, \quad \xi = x_1 - t_1, \quad \tau = t_2, \quad \varepsilon = (\varepsilon/L)^2$$

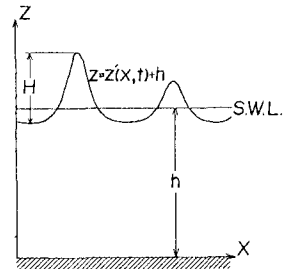


図-1 座標系および記号

$$\xi'(x, t)/\epsilon = \epsilon \eta_1(x_1, x_3, \xi, t_1, t_2, t_3) + \epsilon^2 \eta_2(x_1, x_3, x_4, \xi, t_1, t_2, t_3, t_4) + \dots$$

$$\Phi(x, \xi, t)/\epsilon/\sqrt{\epsilon} = \epsilon^{1/2} \{ \Phi_1(x_1, x_2, x_3, \xi, t_1, t_2, t_3) + \epsilon \Phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi, t_1, t_2, t_3, t_4) + \dots \}$$

これらを式(2)に代入すれば、 $O(\epsilon^2)$ および $O(\epsilon^3)$ において、それぞれ次式が導かれる。

$$\eta_{1t} + (3/2) \eta_1 \eta_{1\xi} + (1/6) \eta_{1\xi\xi\xi} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \eta_{2t} + (3/2) \eta_2 \eta_{2\xi} + (1/6) \eta_{2\xi\xi\xi} = & -\eta_{1x_3} - \eta_{1t_3} - \eta_{1\xi\xi\xi\xi}/15 - \eta_{1\xi\xi\xi}/6 + 3\eta_{1\xi} \eta_{1\xi\xi}/2 + 2\eta_1 \eta_{1\xi\xi\xi} \\ & - 3\eta_1^2 \eta_{1\xi}/2 - 3\eta_1 \eta_{1t}/2 - \eta_{1\xi} \Phi_{1t} - \Phi_{1t}/2 \end{aligned} \quad (4)$$

これより、式(3)はKdV方程式に一致し、 η_1 は波谷面の変動とは独立であるが、 η_2 には x_3 および t_3 に依存する波谷面の変動の影響が及ぶことがわかる。ここでは、KdV方程式のオーダーで波動場を扱うため、 $\xi/\epsilon = \eta \equiv \epsilon \eta_1$ と仮定し、式(3)をこのときの波動方程式とする。

3. 局在海岸波浪の波動解の誘導 式(3)の解をソリトンモード成分および波谷面の変動を表す成分に分け、次式のように与える。

$$\eta = \eta_s(\xi, t) - \eta_0(x_3, t_3), \quad (5)$$

$$\eta_s = \sum_{n=1}^N \text{Log}|F_{mn}|, F_{mn} = \delta_{mn} + 2B_n f_m / (B_n + B_m), f_n = \exp\{B_n(\xi - C_n t - S_n)\}, C_n = A_n/2 - 3\epsilon_0/2, 1 \leq m, n \leq N$$

ここに、 δ_{mn} ; Kronecker のデルタ、 B_n ; ソリトンの固有値 A_n と $B_n = \sqrt{3}A_n$ の関係にある定数、 C_n ; 座標からの各ソリトンの伝播速度、 S_n ; ソリトンの位相定数、および N ; ソリトンの個数。 η_0 は x_3 および t_3 の任意関数であり、所定の波形との適合条件に加え、前述の波形の連続および局在条件を式(5)が満足するようにその関数形は決定される。超関数理論を用いれば、これらの条件を満足する一般的な関数を次式のように与えることができる。

$$\eta_0(x_3, t_3) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i f_n x_3}, U_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i \omega x_3/R} d\omega, f_n = n\pi/R, R(t_3) = \Delta_{\max} - \Delta_{\min} \quad (6)$$

ここに、 $\Delta_{\max}$; $(\epsilon^2 C_1 t_3 + \delta_1)_{\max} + \epsilon$ で与えられる先頭のソリトンの座標に微小量 ϵ を加えたもの、 $\Delta_{\min}$; $(\epsilon^2 C_1 t_3 + \delta_1)_{\min} - \epsilon$ で与えられる末尾のソリトンの座標から ϵ を引いたもの、 R ; ソリトンの存在領域 a ; η_0 の滑らかさの程度を与える50程度の定数、 U_0 ; η_0 の局在性を与える x_3 および t_3 の関数、および C_n ; 波形の連続条件および適合条件を満足させるように決定されるFourier係数。なお、簡単のために、 η_0 は領域 R では一定であると考えれば、式(6)は双曲線関数を用いて次式のように表される。

$$\eta_0(x_3, t_3) = \{\alpha \epsilon^2 / \text{Log} \cosh \alpha \epsilon^2 R\} \{ \tanh \alpha (x_3 - \epsilon^2 \Delta_{\min}) - \tanh \alpha (x_3 - \epsilon^2 \Delta_{\max}) \} \int_{\Delta_{\min}}^{\Delta_{\max}} \eta_s d\xi \quad (7)$$

ここに、 α は η_0 の立ち上りの程度を決める任意定数であり、所定の波形との適合条件によって決まる。

図-2は、式(7)を用いて η_0 を表示したときの式(5)による局在波の波形である。これにより、平均水面周りの波形の連続条件による束縛を受ける局在波の発展現象の記述が可能となることがわかる。

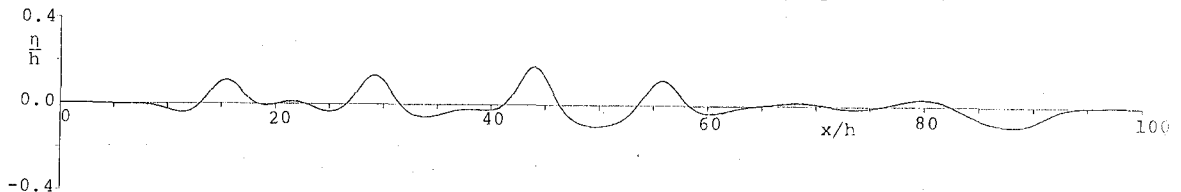


図-2 局在したソリトン合成波形

4. 結 語 ここてで示した扱いによって、これまでのソリトンスペクトル理論が抱えていた問題を解消できると同時に、海岸波浪の力学理論の確立に統計力学的手法を導入できることが明らかとなった。今後は、海岸波浪の発展過程を配列平衡状態に向かう過程として捉え、時系列特性の力学的評価を試みたい。