II—19

ソリトンモードに基づく不規則波浪の統計的取り扱い

岐阜大学　正員　安田孝志
岐阜大学　学生員 ○篠田成郎

1. 緒言

海岸波浪を特色づけているものはその不規則性と非線形性であり，ここに海岸波浪の力学的取り扱いを困難にしている最大の原因があると考えられる。ソリトンスペクトル理論[1]では，海岸波浪は非線形波動解であるソリトンを成分波とするソリトン構造を形成しているとの観点に立つため，ソリトンをスペクトル成分とすることにより海岸波浪の特性の評価が行われることになる。すなわち，線形波動におけるノーマルモードに対応して，非線形波動においてはソリトンがその素励起となっており，深海域から浅海域において，波動の基準モードがノーマルモードからソリトンモードへ遷移していると考えられる。このように，海岸波浪はソリトンモードに基づく力学現象であるため，その状態は波浪の発生域での種々の初期条件によって決定論的に表示される。しかしながら，モード遷移の力学的な機構が未知であることに加えて，現実の海岸波浪には無数のソリトンが存在し，熱力学における気体分子運動の場合と同様に，その運動を厳密に解析するのは困難となっている。したがって，ソリトンモードに基づく海岸波浪は，ソリトンの集合に対する統計的な特性を捉えることにより表示される[2]。すなわち，海岸波浪の不規則性を支配する確率構造は，ソリトンの固有値の出現確率を表すソリトンスペクトル分布を基礎としており，海岸波浪はこの確率構造およびソリトン構造という力学構造の両者によって評価されねばならない。ここでは，以上の観点より，水位変動はソリトンスペクトル分布を基礎とした確率的実現であると考え，その確率的表示を試みる．

2. ソリトンスペクトル分布による水位変動の表示

ソリトンスペクトル理論では，うねり性の海岸波浪の時間波形は次式で与えられる。

$$\eta(t^*)=\sum_{j=1}^{N}A_j\,\mathrm{sech}^2\theta_j-\eta_0,\quad \eta_0=-(2/T^*)\sum_{j=1}^{N}\sqrt{A_j/3}\,\tanh\theta_j\Big|_0^{T^*}\Big/C_j,\quad \theta_j=\sqrt{3A_j/4}\,(-C_jt^*+\delta_j),\quad C_j=1+A_j/2-3\eta_0/2 \qquad (1)$$

ここに，A_j；各ソリトンの固有値，δ_j；各ソリトンの波峯の座標，N；ソリトンの個数，t^*；無次元時刻およびT^*；海岸波浪の無次元観測時間である。この式より，j番目のソリトンの固有値A_jおよび位置δ_jが与えられれば，各ソリトンの波形は一義的に決定されることがわかる。すなわち，Aおよびδの不規則性を水位変動$\eta(t^*)$の確率的要素と見なすことにより，その確率的表示が行われることになる。

さて，j番目のソリトンの位置δ_jは，規準化されたソリトンの間隔t_ℓを用いて次式で表される。

$$\delta_j=\sigma_T\sum_{\ell=1}^{j}t_\ell+j\mu_T \qquad (2)$$

ここに，μ_Tおよびσ_T^2はそれぞれソリトンの間隔の母平均および母分散である。確率変数tに関するj個の標本平均を

$$r_j=(1/j)\sum_{\ell=1}^{j}t_\ell \qquad (3)$$

とすれば，式(2)は次のように書き換えられる。

$$\delta_j=j(\sigma_Tr_j+\mu_T) \qquad (4)$$

この式においてrは確率変数であり，μ_Tおよびσ_Tは確定値であるから，δを統計的に取り扱うにはrの統計的特性を検討することが必須となる。そこで，rの分布について考察する。式(3)で定義された

ようにrは確率変数tの標本平均であり，tの密度関数が正規分布のそれと良く似ている[2]ことから，特定のjに注目したときに得られるr_jなる確率変数は，中心極限定理によりjが小さい場合でも正規分布に従い，今考えているr_jは正規母集団$R_j \sim N(0, 1/j)$からの一つの標本値と見なすことができる。したがって，rの密度関数$f_R(r)$は次式で表される。

$$f_R(r)=\sum_{j=1}^{N-1} f_j(r) / (N-1), \quad f_j(r)=\sqrt{j/2\pi}\cdot \exp\left[-jr^2/2\right] \tag{5}$$

ついで，式(1)は期待値の演算記号$E[\cdot]$を用いると次式のように書き換えられる。

$$\eta(t^*)=N\cdot E[A\,\mathrm{sech}^2\theta]-\eta_0 \tag{6}$$

上式の期待値は時刻t^*を固定したときの各ソリトンの水位変動の母平均を表しており，式(6)で表される水位変動は確定量として取り扱われる。固有値Aをその母平均μ_Aおよび母分散σ_A^2を用いて

$$a_j=(A_j-\mu_A)/\sigma_A \tag{7}$$

のように規準化したaに置き換えて考えれば，$E[A\,\mathrm{sech}^2\theta]$は式(4)および(7)より$\alpha$および$r$の関数$A\,\mathrm{sech}^2\theta$の期待値として計算される。これより式(6)はソリトンスペクトル分布$p(k)$を用いて次式で表される。

$$\eta(t^*)=\sum_{k}\sum_{j=1}^{N} p(k)\cdot I_j(\alpha_k,t^*)-\eta_0, \quad I_j(\alpha_k,t^*)=\int_{-\infty}^{\infty} h_j(\alpha_k,r)\cdot\sum_{n=1}^{N-1} f_n(r)\,dr,$$

$$h_j(\alpha_k,r)=(\sigma_A\alpha_k+\mu_A)\cdot \mathrm{sech}^2\sqrt{3(\sigma_A\alpha_k+\mu_A)/4}\left[-\{1+(\sigma_A\alpha_k+\mu_A)/2-3\eta_0/2\}t^*+j(\sigma_T r+\mu_T)\right] \tag{8}$$

ここに，α_kは確率関数$p(k)$におけるk番目の階級値であり，上式において，ソリトンの固有値Aはこのαで代表されて表示されている。すなわち，この表示においてソリトンの固有値は離散化された不連続値をとることになる。また，式(8)には直接的に何ら不確定な要素は入っていないが，これはソリトンモードの初期状態を表す統計量である$p(k)$, μ_A, σ_A, μ_Tおよびσ_Tが決まれば力学理論に従って水位変動が決定論的に表示されることに対応している。しかるに，ここではソリトンの時系列情報が取り入れられておらず，これを考慮することによって水位変動の確率的要素が明確になると考えられる。

3. 水位変動の確率密度関数

次に，波谷面を基準にした水位変動$\eta(t^*)+\eta_0$の確率密度関数$f_Y(\zeta)$をソリトンスペクトル分布$p(k)$を用いて表示する。まず，水位変動$\eta(t^*)+\eta_0$の確率分布関数$F_Y(\zeta)$は，分布関数の定義より，$\eta(t^*)+\eta_0$がある水位ζより小なる確率で表される。すなわち，

$$F_Y(\zeta)=\Pr[\eta(t^*)+\eta_0\le\zeta]=\sum_{j=1}^{N}\left(1/c_j\sqrt{A_j}\right)\int_0^{\zeta}\mathrm{arcsech}\sqrt{\eta_j/A_j}\,d\eta_j\Big/\sum_{j=1}^{N}\sqrt{A_j}/c_j \tag{9}$$

となる。上式をζで微分すると，次式の密度関数$f_Y(\zeta)$が得られる。

$$f_Y(\zeta)=\frac{\sum_k p(k)\cdot\left[2\ln\left\{1+\sqrt{1-\zeta/(\sigma_A\alpha_k+\mu_A)}\right\}+\ln(\sigma_A\alpha_k+\mu_A)-\ln\zeta\right]\Big/\left[2\sqrt{\sigma_A\alpha_k+\mu_A}\left\{1+(\sigma_A\alpha_k+\mu_A)/2-3\eta_0/2\right\}\right]}{\sum_k p(k)\sqrt{\sigma_A\alpha_k+\mu_A}\Big/\left[3\left\{1+(\sigma_A\alpha_k+\mu_A)/2-3\eta_0/2\right\}\right]} \tag{10}$$

この式より，ソリトンスペクトル分布$p(k)$を与えれば，直ちに水位変動の分布を知ることができる。また，ソリトンスペクトル分布が時空間において保存されることより，ソリトンモードにおける水位変動の分布も伝播に対して不変であると言える。

4. 結 語

以上，紙面の都合で現地海岸波浪との比較は割愛したが，海岸波浪の水位変動がソリトンモードにおける確率的実現と考え，ソリトンスペクトル分布を用いて線形スペクトル理論と同様の表示を行い，さらに水位分布のソリトンスペクトル表示も併せて示すことにより，海岸波浪の確率的解釈を明確にすることができた。

参考文献 1) 安田孝志・篠田成郎・土屋義人：ソリトンスペクトル理論による海岸波浪の内部特性表示，オ29回海講論文集，pp.36-40，1982.

2) 土屋義人・安田孝志・篠田成郎：ソリトンスペクトル理論による海岸波浪の統計的特性，オ30回海講論文集，pp.69-73，1983.