

金沢大学工学部 正会員 石田 啓
金沢大学大学院 学生員 ○加島 卓

1. はじめに 著者らは、従来、数値計算による円柱の波浪振動解析を行ってきたが、その振動特性を把握するに際し、数値解と共に理論解が求められるとより便利である。したがって、本研究ではその第一段階として、簡単なモデルに対し、理論解を求めることとする。

2. 解法 水平方向の柱の変位を ξ 、同方向の水粒子速度を u 、その加速度を $\dot{u}$ と示し、はりの横振動の方程式に、外力として相対水粒子速度を用いたモリソン公式を適用し、 $u \gg \xi$ と仮定すると、

$$(\rho A + K \rho_w A) \xi_{tt} + (C_1 + 2 \frac{C_0 \rho_w D |u|}{2}) \xi_t + EI \xi_{zzzz} = C_H \rho_w A \dot{u} + \frac{1}{2} C_0 \rho_w D |u| \quad (1)$$

となる。ここに z は水底を原点とした鉛直座標、 t は時間、 ρ および ρ_w は柱および水の密度、 C_1 は減衰定数、 D は柱の直径、 A は柱の断面積、 EI は柱の曲げ剛性、 C_H は慣性係数、 C_0 は抗力係数、 K は付加質量係数である。

微小振幅波理論を用い、柱の位置での水面変動を $\eta = a \cos \sigma t$ とし、 $u = a \sigma (\cosh R z / \sinh R R) \cos \sigma t$ および $\dot{u} = -a \sigma^2 (\cosh R z / \sinh R R) \sin \sigma t$ を式(1)に代入し、変数を $\tau = \sigma t$ 、 $z^* = R z$ 、 $R^* = R R$ 、 $\xi^* = \xi / D$ と無次元化すると、

$$M^* \xi_{\tau\tau}^* + C^* \xi_{\tau}^* + \xi_{z^*z^*z^*z^*}^* = -C_H^* \cosh z^* \sin \tau^* + C_0^* (\cosh 2z^* + 1) \cos \tau^* |\cos \tau^*| \quad (2)$$

となる。ここに $M^* = \rho^2 (\rho A + K \rho_w A) / (R^4 EI)$ 、 $C^* = \sigma (C_1 + 2 \frac{C_0 \rho_w D |u|}{2}) / (R^4 EI)$ 、 $C_H^* = C_H \rho_w A \alpha / (D R^4 EI \sinh R^*)$ 、 $C_0^* = C_0 (\rho_w D / 2) \alpha^2 / (D R^4 EI 2 \sinh R^*)$ であり、 α は振幅、 σ は角周波数、 R は波数、 R は水深である。さらに式(2)の $\cos \tau^* |\cos \tau^*|$ の部分をフーリエ級数に展開し、その第3項までを用いると、式(2)は、

$$M^* \xi_{\tau\tau}^* + C^* \xi_{\tau}^* + \xi_{z^*z^*z^*z^*}^* = -C_H^* \cosh z^* \sin \tau^* + C_0^* (\cosh 2z^* + 1) (\frac{8}{3\pi} \cos \tau^* + \frac{8}{15\pi} \cos 3\tau^* - \frac{8}{105\pi} \cos 5\tau^*) \quad (3)$$

となる。ここで、 C^* は $|u|$ を含んでいるが、 M^* に比較して C^* が小さいことから、 $|u|$ のかわりに一周期および鉛直方向での平均値 $\bar{|u|}$ を用い、 C^* を定数として扱う。また、各外力項成分による変位の重ね合わせができるものと仮定し、各成分ごとに方程式を解く。

i) 慣性力項成分による解 慣性力項成分による振動方程式は、

$$M^* \xi_{\tau\tau}^* + C^* \xi_{\tau}^* + \xi_{z^*z^*z^*z^*}^* = -C_H^* \cosh z^* \sin \tau^* \quad (4)$$

となる。今、時間的に過渡応答解は考えず、定常解のみを対象とするから、 $\xi_n^*(z^*, \tau^*) = Z_n(z^*) e^{i\tau^*}$ と仮定し、式(4)に代入し、若干の変形を行なうと、

$$Z_n^{(4)} - 2\alpha_n Z_n^{(2)} + \beta_n Z_n = (\delta_n + i\delta_n) \cosh z^* \quad (5)$$

となる。ここに $\alpha_n = M^*$ 、 $\beta_n = M^* + C^*$ 、 $\delta_n = (M^* - 1) C_H^*$ 、 $\delta_n = C^* C_H^*$ である。式(5)を解くと、

$$\text{特解: } Z_{n1}(z^*) = \frac{\delta_n + i\delta_n}{1 - 2\alpha_n + \beta_n} \cosh z^* \quad (6)$$

$$\text{同次解: } Z_{n2}(z^*) = (X_{n1} \cosh R_n z^* + X_{n2} \sinh R_n z^*) e^{i R_n z^*} + (X_{n3} \cosh R_n z^* + X_{n4} \sinh R_n z^*) e^{-i R_n z^*} \\ + (X_{n5} \cosh g_n z^* + X_{n6} \sinh g_n z^*) e^{i g_n z^*} + (X_{n7} \cosh g_n z^* + X_{n8} \sinh g_n z^*) e^{-i g_n z^*} \quad (7)$$

となる。ここに $R_n = \sqrt[4]{\alpha_n} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\alpha_n}}}{2}}$ 、 $g_n = \sqrt[4]{\alpha_n} \sqrt{\frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 + 4\alpha_n}}}{2}}$ 、 $r_n = \sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n}} = \sqrt{1 + \left(\frac{C^*}{M^*}\right)}$ 、 X_{ni} は複素係数である。

今、 $C^* \ll M^*$ と仮定すると、 $r_n \approx 1$ 、 $R_n \approx \sqrt[4]{\alpha_n}$ 、 $g_n \approx 0$ となり、式(7)は、

$$Z_{H2}(z^*) = F_{H1} \cosh P_H z^* + F_{H2} \sinh P_H z^* + F_{H3} \cos P_H z^* + F_{H4} \sin P_H z^* \quad (8)$$

となる。ここに F_{Hi} は複素係数である。

ii) 抗力項成分による解 抗力項成分による振動方程式は、

$$M^* \xi_{Dn}^{**} + C^* \xi_{Dn}^* + \xi_{Dn}^* z^* z^* = Q_n (\cosh 2z^* + 1) \cos nt^* \quad (9)$$

となる。ここに $n=1, 3, 5$, $Q_1 = C_0^* \frac{8}{3\pi}$, $Q_3 = C_0^* \frac{8}{15\pi}$, $Q_5 = -C_0^* \frac{8}{105\pi}$ である。慣性力項成分の時と同様に $\xi_{Dn}^*(z^*, t^*) = Z_{Dn}(z^*) e^{int^*}$ と仮定し、式(9)に代入し、若干の変形を行なうと、

$$Z_{Dn}^{(8)} - 2\alpha_{Dn} Z_{Dn}^{(4)} + \beta_{Dn} Z_{Dn} = -(\delta_{Dn} + i\epsilon_{Dn}) \cosh 2z^* - (\epsilon_{Dn} + i\delta_{Dn}) \quad (10)$$

となる。ここに $\alpha_{Dn} = M^* n^2$, $\beta_{Dn} = n^2 (M^* n^2 + C^*)$, $\delta_{Dn} = Q_n (M^* n^2 - 16)$, $\epsilon_{Dn} = Q_n C^* n$, $\epsilon_{Dn} = M^* n^2 Q_n$ である。

式(10)を解くと、

$$\text{特解: } Z_{Dn1}(z^*) = -\frac{\delta_{Dn} + i\epsilon_{Dn}}{256 - 32\alpha_{Dn} + \beta_{Dn}} \cosh 2z^* - \frac{\epsilon_{Dn} + i\delta_{Dn}}{\beta_{Dn}} \quad (11)$$

$$\text{同次解: } Z_{Dn2}(z^*) = (X_{Dn1} \cosh P_{Dn} z^* + X_{Dn2} \sinh P_{Dn} z^*) e^{i\beta_{Dn} z^*} + (X_{Dn3} \cosh P_{Dn} z^* + X_{Dn4} \sinh P_{Dn} z^*) e^{-i\beta_{Dn} z^*} \\ + (X_{Dn5} \cosh g_{Dn} z^* + X_{Dn6} \sinh g_{Dn} z^*) e^{i\beta_{Dn} z^*} + (X_{Dn7} \cosh g_{Dn} z^* + X_{Dn8} \sinh g_{Dn} z^*) e^{-i\beta_{Dn} z^*} \quad (12)$$

となる。ここに $P_{Dn} = \sqrt[4]{\alpha_{Dn} \frac{\sqrt{1 + (1/\beta_{Dn})^2}}{2}}$, $g_{Dn} = \sqrt[4]{\alpha_{Dn} \frac{\sqrt{1 - (1/\beta_{Dn})^2}}{2}}$, $r_{Dn} = \sqrt{\frac{\beta_{Dn}}{\alpha_{Dn}}} = \sqrt{1 + \left(\frac{C^*}{M^* n^2}\right)}$, X_{Dni} は複素係数である。

慣性力項成分の時と同様に $C^* \ll M^*$ と仮定すると、 $r_{Dn} \approx 1$, $P_{Dn} \approx \sqrt[4]{\alpha_{Dn}}$, $g_{Dn} \approx 0$ となり、式(12)は、

$$Z_{Dn2}(z^*) = F_{Dn1} \cosh P_{Dn} z^* + F_{Dn2} \sinh P_{Dn} z^* + F_{Dn3} \cos P_{Dn} z^* + F_{Dn4} \sin P_{Dn} z^* \quad (13)$$

となる。ここに F_{Dni} は複素係数である。

以上より、変位 $\xi^*(z^*, t^*)$ は、

$$\xi^*(z^*, t^*) = (F_{H1} \cosh P_H z^* + F_{H2} \sinh P_H z^* + F_{H3} \cos P_H z^* + F_{H4} \sin P_H z^* + \frac{\delta_{H1} + i\epsilon_{H1}}{1 - 2\alpha_{H1} + \beta_{H1}} \cosh 2z^* - \frac{\epsilon_{H1} + i\delta_{H1}}{\beta_{H1}}) e^{it^*} \\ + (F_{D11} \cosh P_{D1} z^* + F_{D12} \sinh P_{D1} z^* + F_{D13} \cos P_{D1} z^* + F_{D14} \sin P_{D1} z^* - \frac{\delta_{D1} + i\epsilon_{D1}}{256 - 32\alpha_{D1} + \beta_{D1}} \cosh 2z^* - \frac{\epsilon_{D1} + i\delta_{D1}}{\beta_{D1}}) e^{it^*} \\ + (F_{D31} \cosh P_{D3} z^* + F_{D32} \sinh P_{D3} z^* + F_{D33} \cos P_{D3} z^* + F_{D34} \sin P_{D3} z^* - \frac{\delta_{D3} + i\epsilon_{D3}}{256 - 32\alpha_{D3} + \beta_{D3}} \cosh 2z^* - \frac{\epsilon_{D3} + i\delta_{D3}}{\beta_{D3}}) e^{i3t^*} \\ + (F_{D51} \cosh P_{D5} z^* + F_{D52} \sinh P_{D5} z^* + F_{D53} \cos P_{D5} z^* + F_{D54} \sin P_{D5} z^* - \frac{\delta_{D5} + i\epsilon_{D5}}{256 - 32\alpha_{D5} + \beta_{D5}} \cosh 2z^* - \frac{\epsilon_{D5} + i\delta_{D5}}{\beta_{D5}}) e^{i5t^*} \quad (14)$$

となる。ここで F_{Hi} および F_{Dni} は、各外力項成分ごとに境界条件より決まる。

今、波高が小さく、式(14)を水深と等しい長さの円柱の頂部まで適用できるものと仮定すると、境界条件は以下になる。

$$\left. \begin{aligned} \xi^*(0, t^*) &= 0, \quad \partial \xi^*(0, t^*) / \partial z^* = 0 & ; z^* &= 0 \\ -EI \partial^3 \xi^*(R^*, t^*) / \partial z^{*3} &= 0, \quad -EI \partial^2 \xi^*(R^*, t^*) / \partial z^{*2} = 0 & ; z^* &= R^* \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3. 計算結果および考察

図-1は、円柱頂部の変位の一周期の時間変化を示したものであり、縦軸は変位を、理論解の最大値で除したものである。横軸は波の位相であり、 $t/T=0$ が峰の位相である。実線および破線は、式(14)および伝達マトリックス法による計算値である。両者はよく一致しており、この解の妥当性を示している。しかし、2, 3の仮定が含まれており、その適用範囲には限界があるものと思われる。

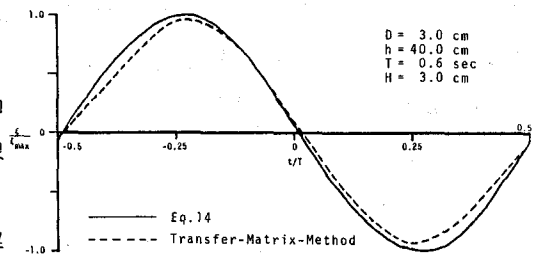


図-1 円柱頂部の振動変位の時間変化

今後は、適用限界の確定と同時に、より一般化するために、空中部分を有する円柱への応用や実験値との比較を行なう予定である。

<参考文献> 石田啓, 渡辺公徳, 松井輝峰; 柱状構造物の波浪振動解析に関する研究, 金沢大学工学部要第14巻第1号, 1981