II — 7

波高変化を考慮した砕波波形について

金沢大学工学部　正会員　石田　啓
金沢大学大学院　学生員○細沼宏之

1. まえがき　浅海域における砕波現象を解明することは，海岸浸食を考えるにあたって重要な問題である。 著者らはすでに，波動場の方程式をデカルト座標系から楕円座標系に変換することにより一様勾配斜面上で砕波する波の理論近似解を求めたが，水深が非常に小さい場所では，誤差が増加する欠点があった。 本研究では，この問題点を考慮した別の理論解を求めることとする。

2. 理　論　水平座標 x および鉛直座標 y を，沖波波数 K_0 を乗じて，時間 t を，角周波数 σ_0 を乗じて，また，速度ポテンシャル ϕ を，K_0^2/σ_0 を乗じて無次元化する。 以下，無次元化された諸量に，′を付す。 次に，一様斜面上の領域 z' 平面を一様水深領域 w 平面に変換する写像関数を，$w=\log z'$ で与えると[1]，(x', y') 座標と，(ξ, η) 座標の対応は，　$x' = e^{\xi}\cos\eta$，$y' = e^{\xi}\sin\eta$　となる。 次に，水平座標の圧縮パラメータ δ を用いて，$\lambda = \delta\xi$ とおく[2]。 基礎方程式の非線形項を無視し，微小振幅波のオーダーで考えると，

$$\left.\begin{array}{ll} \delta^2\phi'_{\lambda\lambda} + \phi'_{\eta\eta} = 0 & \\ \phi'_{\eta} = 0 & ;\ \eta = -\theta_B \\ \phi'_{t'} + \zeta' = 0 & ;\ y' = \eta^* \approx 0 \\ \zeta'_{t'} - \cos\eta\,\phi'_{\eta}/e^{\xi} = 0 & ;\ y' = \eta^* \approx 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

となる。 ここで解を，

$$\phi' = A e^{i\chi},\quad \zeta' = Y e^{i\chi},\quad \chi = \delta^{-1}\int k\, d\lambda + t' \quad (2)$$

と仮定し，式(1)に代入すると次式が得られる。

$$\left.\begin{array}{ll} A_{\eta\eta} - k^2 A + i\delta(2kA_{\lambda} + k_{\lambda}A) + \delta^2 A_{\lambda\lambda} = 0 & \\ A_{\eta} = 0 & ;\ \eta = -\theta_B \\ Y = iA & ;\ y' = 0 \\ \cos\eta\, A_{\eta}/e^{\xi} - A = 0 & ;\ y' = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

次に，A，Y および k を，微小パラメータ δ を用いて摂動展開すると，

$$A = A^{(0)} + \delta A^{(1)} + \delta^2 A^{(2)} + \cdots,\quad Y = Y^{(0)} + \delta Y^{(1)} + \delta^2 Y^{(2)} + \cdots,\quad k = k^{(0)} + \delta k^{(1)} + \delta^2 k^{(2)} + \cdots \quad (4)$$

となる。 これらを式(3)に代入し，δ^0 および δ^1 のオーダーで整理すると，それぞれ，

$$\langle \delta^0 \rangle \quad \left.\begin{array}{ll} A^{(0)}_{\eta\eta} - k^{(0)2}A^{(0)} = 0 & \\ A^{(0)}_{\eta} = 0 & ;\ \eta = -\theta_B \\ Y^{(0)} = iA^{(0)} & ;\ y' = 0 \\ \cos\eta\, A^{(0)}_{\eta}/e^{\xi} - A^{(0)} = 0 & ;\ y' = 0 \end{array}\right\} (5)$$

$$\langle \delta^1 \rangle \quad \left.\begin{array}{ll} A^{(1)}_{\eta\eta} - k^{(0)2}A^{(1)} = 2k^{(0)}k^{(1)}A^{(0)} - i(2k^{(0)}A^{(0)}_{\lambda} + k^{(0)}_{\lambda}A^{(0)}) & \\ A^{(1)}_{\eta} = 0 & ;\ \eta = -\theta_B \\ Y^{(1)} = iA^{(1)} & ;\ y' = 0 \\ \cos\eta\, A^{(1)}_{\eta}/e^{\xi} - A^{(1)} = 0 & ;\ y' = 0 \end{array}\right\} (6)$$

となる。 δ^0 のオーダーの解を求めると，

$$\left.\begin{array}{lll} A^{(0)} = -ia\cosh r(\eta + \theta_B), & \phi^{(0)} = a\cosh r(\eta + \theta_B)\sin\chi & \text{ただし，}\ r = k^{(0)} \\ Y^{(0)} = a\cosh r(\eta^* + \theta_B), & \zeta^{(0)} = a\cosh r(\eta^* + \theta_B)\cos\chi & \eta^*\text{は水面を表わす。} \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$(\gamma/e^{\xi})\tanh(\gamma/e^{\xi}\cdot h)=1$$

となる。　ここで，$\alpha=\gamma(\eta+\theta_B)$と書くと，　$A_\eta=\gamma A_\alpha$，$A_{\eta\eta}=\gamma^2 A_{\alpha\alpha}$ が得られる。　これらを考慮し，式(7)を式(6·1)に代入すると，

$$A^{(1)}_{\alpha\alpha}-A^{(1)}=-2\gamma^{-2}a\gamma_\lambda\alpha\sinh\alpha-\gamma^{-2}(2a_\lambda\gamma+a\gamma_\lambda)\cosh\alpha-i\cdot 2a\gamma k^{(1)}\cosh\alpha \tag{8}$$

となり，したがって，$k^{(1)}=0$となる。　式(8)の特解を，

$$A^{(1)}=C_1\alpha^2\cosh\alpha+C_2\alpha\sinh\alpha \tag{9}$$

とし，式(8)に代入すると，　$C_1=-1/2\cdot\gamma^{-2}a\gamma_\lambda$，$C_2=-\gamma^{-1}a_\lambda$　となる。　また，式(8)の一般解を，

$$A^{(1)}=C_1\alpha^2\cosh\alpha+C_2\alpha\sinh\alpha+C_3\sinh\alpha \tag{10}$$

とし，式(6·2)に代入すると，　$C_3=0$　となる。　したがって，式(6)の解は，次式の様になる。

$$A^{(1)}=C_1\alpha^2\cosh\alpha+C_2\alpha\sinh\alpha,\quad Y^{(1)}=i(C_1\alpha^{*2}\cosh\alpha^*+C_2\alpha^*\sinh\alpha^*)\quad \text{ただし,}\ \alpha^*=\gamma(\eta^*+\theta_B) \tag{11}$$

一方，振幅aの水深の減少に伴う変化は，エネルギーフラックスの保存則を適用すると，

$$a^2(\gamma\theta_B+1/2\cdot\sinh 2\gamma\theta_B)=C \tag{12}$$

と表わされるが，　$H^{(0)}/2=a\cosh\gamma\theta_B$　の関係を用い，沖波波高をH_0と書くと，

$$(H_0/2)^2=\lim_{\gamma\to\infty}(H^{(0)}/2)^2=\lim_{\gamma\to\infty}\left[C/\{(2\gamma\theta_B/\cosh 2\gamma\theta_B+\tanh 2\gamma\theta_B)/(1/\cosh 2\gamma\theta_B+1)\}\right]=C \tag{13}$$

となる。　したがって，

$$(H_0/2)^2=a^2(\gamma\theta_B+1/2\cdot\sinh 2\gamma\theta_B) \tag{14}$$

により，aを求めることができる。　また，C_1およびC_2に含まれるγ_λおよびa_λは，それぞれ式(7·3)および式(12)を微分することにより，

$$\left.\begin{aligned}\gamma_\lambda&=\gamma/\delta-\gamma h_\lambda/\{\sinh(\gamma h/e^{\xi})+h\}\\ a_\lambda&=-(a/2)\cdot\gamma_\lambda\theta_B(1+\cosh 2\gamma\theta_B)/(\gamma\theta_B+1/2\cdot\sinh 2\gamma\theta_B)\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

のように表わされる。　以上で得られた解をδ^1のオーダーまでで整理すると，

$$\left.\begin{aligned}\phi&=A^{(0)}\sin\chi+\delta A^{(1)}\cos\chi,\quad A^{(0)}=a\cosh\alpha,\quad A^{(1)}=C_1\alpha^2\cosh\alpha+C_2\alpha\sinh\alpha\\ \zeta'&=Y^{(0)}\cos\chi-\delta Y^{(1)}\sin\chi,\quad Y^{(0)}=a\cosh\alpha^*,\quad Y^{(1)}=C_1\alpha^{*2}\cosh\alpha^*+C_2\alpha^*\sinh\alpha^*\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

となる。　以上の解は，水平座標ξをδにより圧縮して(λ,η)系で表示したものであるが，元の(ξ,η)座標に戻すと，δは消去されて，解は，

$$\left.\begin{aligned}\phi&=A^{(0)}\sin\chi+A^{(1)}\cos\chi\\ \zeta'&=Y^{(0)}\cos\chi-Y^{(1)}\sin\chi\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

のように表わされる。　なお，式中のη^*は水面yが，　$y=e^{\xi}\sin\eta$　で与えられることから，

$$\eta^*=\sin^{-1}(\zeta'/e^{\xi}) \tag{18}$$

のようにζ'を用いて表わすことができる。　したがって，式(18)のη^*を式(17·2)に代入すると，水面波形が，$\zeta'_{n+1}=f(\zeta'_n)$　の形で与えられるため，実際にζ'を求めるためには，$\zeta'_{n+1}=\zeta'_n$　となるまで収束を行なう必要がある。

計算結果については，講演時に発表する予定である。

《参考文献》

1) 日野幹雄，灘岡和夫；共形変換を用いた任意断面地形上の波動場の解析法；第30回海講論文集，1983

2) 浜中建一郎，加藤一之；有限振幅波の浅水変形に対する摂動解；第29回海講論文集，1982